

# GEOMETRÍA

## 1.- INTRODUCCIÓN:

Etimológicamente hablando, la palabra Geometría procede del griego y significa “Medida de la Tierra”. La Geometría es la parte de las Matemáticas que estudia las idealizaciones del espacio en términos de las propiedades y medidas de las figuras geométricas.

La Geometría no estudia el espacio real en sí mismo, sino objetos ideales (también conocidos como objetos matemáticos o geométricos), sus propiedades, relaciones y teorías, construidos por abstracción de cualidades del espacio real o de otros objetos ideales creados previamente (en el espacio real no existen círculos, pentágonos, rectas, puntos, esferas... sino objetos que tienen forma de... o modelizados por...; la realidad física siempre es menos perfecta que la realidad geométrica pensada o ideal).

Así, podremos estudiar la forma de una ventana como la de la Ilustración 1 y sus propiedades.



Ilustración 1

Esta ventana tiene la propiedad de que tiene forma de triángulo, pero no es un triángulo, ya que un triángulo es un concepto abstracto, ideal, que no puede encontrarse en la realidad.

Los **componentes elementales** de las figuras geométricas serán:

1. Punto: Un punto es un objeto que no tiene dimensiones que indica una posición en el espacio. Se suelen designar con letras mayúsculas A, B, C,... P,...
2. Recta: Es una línea ilimitada por ambos extremos. Se suele denotar con letras minúsculas r, s, t,... Como representación en la realidad de una recta podemos tomar un hilo tenso, o el borde de una regla.

3. Plano: es una superficie ilimitada cuya concreción en el mundo real puede verse, por ejemplo, en la superficie de una mesa, una hoja de papel,... Se suele representar con las letras griegas  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$

Los puntos son objetos de la geometría lineal, puntos y rectas dan lugar a la geometría plana y los puntos, las rectas y los planos son objetos de la geometría espacial.

Algunas consideraciones a tener en cuenta en geometría son las siguientes:

- Dos puntos distintos determinan una y sólo una línea recta que contiene a dichos puntos.
- Tres o más puntos pueden determinar varias rectas, pero si están todos contenidos en una se dirá que los puntos son colineales.
- Tres puntos no colineales determinan un plano.

**El objetivo de la Geometría, por tanto, será describir, clasificar y estudiar las propiedades de las figuras geométricas.**

## 2.- RECTAS y SEGMENTOS:

Dos rectas contenidas en el plano que no tienen ningún punto en común se dice que son **paralelas** (Ilustración 2). Si tienen un solo punto en común se dice que son **concurrentes o secantes** (Ilustración 3). Una recta que corta a otras dos se dice que es una transversal.

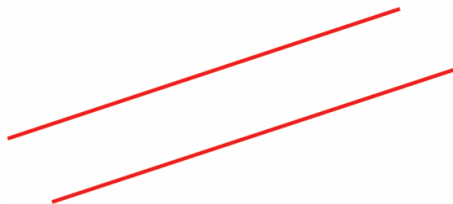


Ilustración 2

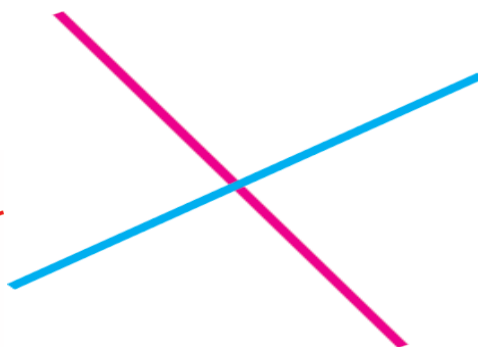


Ilustración 3

Todo punto P divide a la recta que lo contiene en dos subconjuntos llamados **semirrectas** o **rayos de extremo P**. También podemos construir **semiplanos** cuando quitamos a un plano una recta del mismo. Cada una de las dos divisiones hechas será un semiplano.

Un **segmento** es un conjunto de puntos comprendido entre dos puntos. Si los extremos del segmento son los puntos A y B, el segmento se suele representar por AB. La distancia entre los dos extremos del segmento se llama **longitud** del segmento. Además, puede definirse también como la intersección de dos semirrectas contenidas en una misma recta.



Ilustración 4

### 3.- ÁNGULOS:

Un ángulo es la región del plano resultado de la intersección de dos semiplanos cerrados obtenida a partir de dos rectas incidentes.

Para medir los ángulos se pueden usar distintas unidades:

- a) **Radianes:** un radián es la medida del ángulo cuyo arco tiene una longitud igual al radio de la circunferencia en la que está comprendido.
- b) **Grados sexagesimales:** es la medida del ángulo cuya longitud de arco es igual a la 360ava parte de la longitud de la circunferencia. Sus divisiones son **minutos** y **segundos**, que se representan por ' y " respectivamente. **Para operar con ángulos dados de esta forma se trabaja en base 60.**
- c) **Grados centesimales:** es la medida del ángulo cuya longitud de arco es igual a la 400ava parte de la longitud de la circunferencia. Sus divisiones son minutos y segundos centesimales.

Para pasar de una a otra medida se utiliza la siguiente equivalencia de unidades:

$$2\pi \text{ radianes} = 360^\circ \text{ sexagesimales} = 400^\circ \text{ centesimales}$$

Por ejemplo, si queremos sumar dos ángulos cuyas medidas en grados sexagesimales son  $27^{\circ} 31' 15''$  y  $43^{\circ} 42' 57''$ , lo tendremos que hacer sumando en base 60. Así,

$$\begin{array}{r} 27^{\circ} 31' 15'' \\ + \underline{43^{\circ} 42' 57''} \\ \hline 71^{\circ} 14' 12'' \end{array}$$

La operación de diferencia de ángulos se realiza como aprendimos en el tema del número natural, operando en base 60. Para realizar la siguiente resta

$$\begin{array}{r} 163^{\circ} 15' 43'' \\ - \underline{96^{\circ} 37' 51''} \\ \hline \end{array}$$

Podemos transformarla en

$$\begin{array}{r} 162^{\circ} 74' 103'' \\ - \underline{96^{\circ} 37' 51''} \\ \hline 66^{\circ} 37' 52'' \end{array}$$

para obtener el resultado.

También podemos pasar ángulos de una unidad de medida a otra a través de reglas de tres. Por ejemplo, si queremos pasar  $180^{\circ}$  a radianes, sólo tenemos que tener en cuenta que  $360^{\circ}$  son  $2\pi$  radianes.

$$360^{\circ} \rightarrow 2\pi \text{ radianes}$$

$$180^{\circ} \rightarrow x \text{ radianes}$$

$$\text{Por tanto, } x = (180 \cdot 2 \cdot \pi) / 360 \text{ radianes} = \pi \text{ radianes.}$$

Otro ejemplo, si tenemos  $\pi/2$  radianes, ¿Cuánto mide dicho ángulo en grados sexagesimales? Basta escribir

$$360^{\circ} \rightarrow 2\pi \text{ radianes}$$

$$x^{\circ} \rightarrow \pi/2 \text{ radianes}$$

$$\text{Por lo que } x = (\pi/2 \cdot 360) / 2\pi \text{ grados sexagesimales} = 90^{\circ}$$

Los ángulos se pueden clasificar por su medida de esta forma:

Un ángulo puede ser **nulo, agudo, recto, obtuso, llano**. Busca su definición como ejercicio.

Se dice que dos **ángulos** son **complementarios** si su suma vale  $90^\circ$ . Dos ángulos son suplementarios si su suma vale  $180^\circ$ . Si nos piden buscar el ángulo complementario a otro dado, sólo tenemos que restar a  $90^\circ$  dicho ángulo y si nos piden buscar el ángulo suplementario a otro dado, sólo tenemos que restar  $180^\circ$  al ángulo que nos dan.

Por ejemplo: Buscar el ángulo complementario a  $27^\circ 31' 15''$ . Calculamos

$$\begin{array}{r} 90^\circ \\ - \underline{27^\circ 31' 15''} \end{array}$$

que vale

$$\begin{array}{r} 89^\circ 59' 60'' \\ - \underline{27^\circ 31' 15''} \\ 62^\circ 28' 45'' \end{array}$$

#### 4.- Circunferencia:

Una **curva** se puede describir intuitivamente como el conjunto de puntos que un lápiz traza al ser desplazado por el plano sin ser levantado. Si el lápiz no pasa por un mismo punto dos veces, se dice que la **curva** es **simple**. Si el lápiz se levanta en el mismo punto en que se comenzó a trazar la curva, se dice que la curva es **cerrada**.

Una **circunferencia** es una curva cerrada que verifica que la distancia a cualquiera de sus puntos a otro punto fijo que se llama **centro** es constante. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto dado, del centro de la circunferencia.

Elementos de la circunferencia:

- **centro**: es el punto fijo equidistante de cualquier punto de la circunferencia.
- **Radio**: es un segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.
- **Cuerda**: es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- **Diámetro**: es una cuerda que pasa por el centro.

- **Arco:** cada una de las dos partes en que una cuerda divide a una circunferencia.

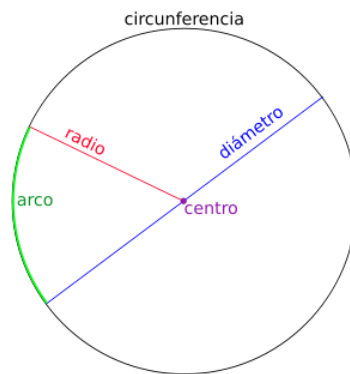


Ilustración 5

## 5.- Polígonos:

Una curva simple que está formada por segmentos unidos por sus extremos se dice que es una **curva poligonal**. Si dicha curva es cerrada se dice que es un **polígono**. A estos segmentos se les llama **lados** y a los extremos de esos segmentos se les llama **vértices**.

Si todos los lados de un polígono son iguales se dice que es **regular**. Los polígonos se van a nombrar según el número de lados o vértices que tienen (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono,...)

Polígonos regulares:

- Un polígono que tiene todos sus lados iguales se dice que es **equilátero**.
- Un polígono convexo cuyos ángulos interiores son todos congruentes se dice que es **equiángulo**.
- Un polígono convexo que tiene todos sus lados y ángulos iguales se dice que es **regular**. En un polígono regular de  $n$  lados, cualquier ángulo con vértice en el centro y cuyos lados contienen vértices adyacentes del polígono se dice que es un **ángulo central** del polígono.

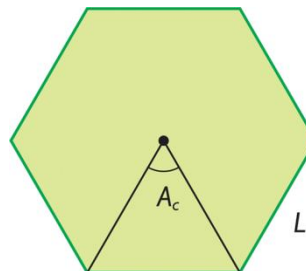


Ilustración 6

*Ejercicio:*

Busca información acerca de:

- Rectas notables de un triángulo.
- Clasificación de los triángulos en función de sus ángulos
- Clasificación de los triángulos en función de sus lados.
- Clasificación de los cuadriláteros.

## 6.- Proporcionalidad geométrica y el Teorema de Thales:

Dados dos segmentos AB y CD, se llama **razón** entre dichos segmentos al cociente de dividir la longitud del segmento AB entre la longitud del segmento CD.

Si la razón de dos segmentos AB y CD es igual a la razón de los segmentos FG y MN, decimos que AB y CD son **proporcionales** a FG y MN.

Dos polígonos son **semejantes** si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales. Por ejemplo, los polígonos de la siguiente ilustración son semejantes.

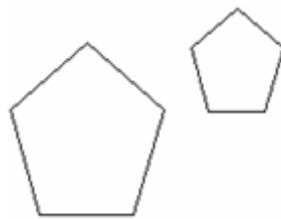
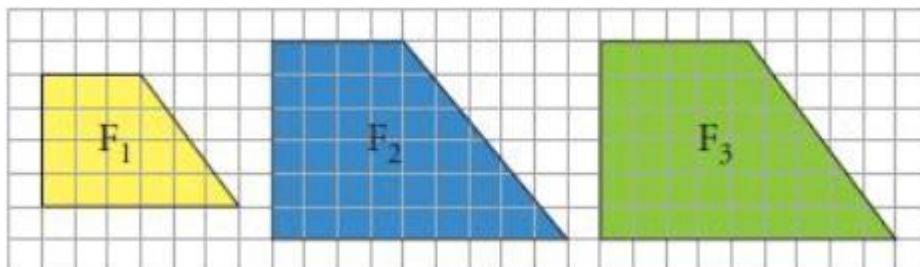


Ilustración 7

Por ejemplo, los siguientes polígonos son semejantes.



Todos sus lados son proporcionales. La razón de proporcionalidad entre F<sub>1</sub> y F<sub>2</sub> es

$$\frac{3}{4} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{5}{7.5} = \mathbf{0.75}$$

Intenta calcular la razón de proporcionalidad entre  $F_1$  y  $F_3$  y la razón de proporcionalidad entre  $F_2$  y  $F_3$ .

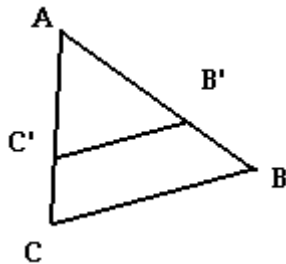
**Teorema de Tales:**

Si por un triángulo se traza un segmento paralelo a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.

Vamos a escribir algún ejemplo de aplicación del teorema de Tales.

**Ejemplo 1:**

Consideramos la siguiente figura. Sabemos que  $AB'$  mide 5 cm y  $AB$  mide 8 cm. Además,  $AC'$  mide 4 cm. ¿Cuánto mide  $AC$ ?



Según el teorema de Tales, tenemos que

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

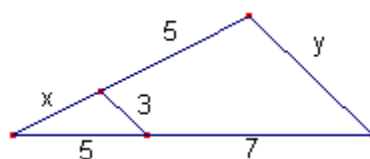
Por tanto,

$$\frac{5}{8} = \frac{4}{AC}$$

Luego  $AC$  mide  $32/5=6,4$  cm.

**Ejemplo2:**

Calcular la medida que falta en el siguiente triángulo.





Basta aplicar el Teorema de Tales de forma que tenemos que los lados de los triángulos que aparecen en la figura son proporcionales. Así,

$$\frac{x}{5+x} = \frac{3}{y} = \frac{5}{5+7}$$

De lo anterior tenemos que  $5/(5+7)=5/12=0.417$ .

Así que  $x/(5+x)=0.417$ . Obtenemos una ecuación que podemos resolver en  $x$ , obteniendo  $x= 3,57$ . Para calcular  $y$  sólo tenemos que resolver  $3/y=0.417$ , es decir,  $y=7,19$ .