Tema 3. Polinomios y otras expresiones algebraicas

(Estos conceptos están extraídos del libro Matemáticas 1 de Bachillerato. McGraw–Hill)

1. Polinomios: operaciones con polinomios

Un polinomio de grado n, en una variable x, es una expresión algebraica de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ son números llamados **coeficientes**.

Todos lo exponentes deben ser enteros positivos; el mayor de ellos indica el grado del polinomio.

A cada uno de los sumandos se les llama términos. El término de grado 2 es $a_2 x^2$. El término principal es $a_n x^n$, el de mayor grado. El número a_0 se llama término independiente.

Dos términos son semejantes cuando sólo difieren en los coeficientes: $a_n x^n$ y $b_n x^n$ son semejantes. En particular, $5x^3$ y $-17x^3$ son semejantes; por el contrario, $10x^2$ y $10x$ no lo son.

- **Suma y resta de polinomios**

Para sumar polinomios se agrupan, sumando o restando, los términos semejantes.

Ejemplo:

- $(4x^3 + 5x - 6) - (3x^3 - 2x^2 + 7x) + (6x^3 + 4x^2 - x + 5) = 7x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

OJO: $2x^5 - 4x^3$ no puede realizarse; debe dejarse así. Lo más que puede hacerse es sacar factor común: $2x^5 - 4x^3 = 2x^3(x^2 - 2)$.

- **Multiplicación de polinomios**

Se utiliza la propiedad distributiva del producto y las propiedades de la potenciación.

Ejemplos:

- $3\cdot(4x^2 + 5x - 6) = 12x^2 + 15x - 18$
- $(2x^2 + 5x - 6)\cdot(3x^2 - 2x + 3) = 6x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 15x^3 - 10x^2 + 15x - 18x^2 + 12x - 18$
  $= 6x^4 + 11x^3 - 22x^2 + 27x - 18$
- $\left(\frac{2}{3}x^2 - 3x\right)\cdot\left(-2x^2 + \frac{3}{4}\right) = -\frac{4}{5}x^4 + \frac{6}{12}x^2 + 6x^3 - \frac{9}{4}x = -\frac{4}{5}x^4 + 6x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$

- **Productos notables:**

Son las operaciones que aparecen con relativa frecuencia. Conocerlas de memoria agiliza los cálculos. Indicamos los tres casos más frecuentes.

Caso:	Ejemplo:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(2+3x^2)^2 = 4 + 12x^2 + 9x^4$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(\sqrt{x-2}+3)(\sqrt{x-2}-3) = (\sqrt{x-2})^2 - 3^2 = x - 2 - 9 = x - 11$

- **Potencia de un binomio**

Fórmula de Newton para el cálculo de la potencia n-ésima de un binomio:

$$(p+q)^n = \binom{n}{0}p^n + \binom{n}{1}p^{n-1}q + \binom{n}{2}p^{n-2}q^2 + ... + \binom{n}{n-1}pq^{n-1} + \binom{n}{n}q^n$$

$$(p-q)^n = \binom{n}{0}p^n - \binom{n}{1}p^{n-1}q + \binom{n}{2}p^{n-2}q^2 - ... \pm \binom{n}{n-1}pq^{n-1} \pm \binom{n}{n}q^n$$

Ejemplos:

a) $(2x+4)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3 + \binom{3}{1}(2x)^2 \cdot 4 + \binom{3}{2}(2x)\cdot 4^2 + \binom{3}{3}\cdot 4^3 = 8x^3 + 48x^2 + 96x + 64$.

b) $(x-2)^4 = \binom{4}{0}x^4 - \binom{4}{1}x^3 \cdot 2 + \binom{4}{2}x^2 \cdot 2^2 - \binom{4}{3}x \cdot 2^3 + \binom{4}{4}\cdot 2^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 48x + 16$.

- **División de monomios**

Se basa en las operaciones con potencias.

Ejemplos:

- $\dfrac{12x^3}{2x} = 6x^2$;
- $\dfrac{2x^2}{5x^3} = \dfrac{2}{5x}$;
- $\dfrac{3x^3}{-2x} = -\dfrac{3}{2}x^2$

- **División de polinomios**

Para dividir polinomios hay que ordenarlos. Se recuerda el algoritmo con el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & & -22x^2 & +27x & -18 & 2x^2+x \\ \cline{6-6}
-8x^4 & -4x^3 & & & & 4x^2-2x-10 \\ \cline{1-3}
& -4x^3 & -22x^2 & & & \\
& +4x^3 & +2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
& & -20x^2 & +27x & & \\
& & +20x^2 & +10x & & \\ \cline{3-5}
& & & 37x & -18 &
\end{array}$$

Regla de la división

Dividendo = divisor $\times$ cociente + resto $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \dfrac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

En el caso de polinomios, puede escribirse:

$$D(x) = d(x)\cdot c(x) + r(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

La segunda igualdad se emplea con relativa frecuencia en Matemáticas

Ejemplo:

- La división entre $D(x) = 8x^4 - 22x^2 + 27x - 18$ y $d(x) = 2x^2 + x$ da de cociente $c(x) = 4x^2 - 2x - 10$, y de resto $r(x) = 37x - 18$; entonces:

$$(2x^2+x)\cdot(4x^2-2x-10) + 37x - 18 = 8x^4 - 22x^2 + 27x - 18$$

y también: $\dfrac{8x^4 - 22x^2 + 27x - 18}{2x^2+x} = 4x^2 - 2x - 10 + \dfrac{37x-18}{2x^2+x}$

- **Teoremas del resto y del factor**

Teorema el resto. El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$ es igual al resto de la división $P(x):(x-a)$.
Demostración:
Si al dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ el cociente es $c(x)$ y el resto r (en este caso, el resto es un número), entonces: $P(x) = (x-a)\cdot c(x) + r$.
Dando a x el valor a, se tiene: $P(a) = (a-a)\cdot c(a) + r = 0 + r$. Esto es, $P(a) = r$.

Ejemplos:

- Para $P(x) = 2x^3 - 3x$ y para $x = 2$, se tiene que $P(2) = 10$. Observa que coincide con el resto de la división $(2x^3 - 3x):(x-2)$, hecha anteriormente.
- Para $P(x) = x^3 - 2x - 1$ y para $x = -1$, se tiene que $P(-1) = 0$. También coincide con el resto de la división $(x^3 - 2x - 1):(x+1)$, hecha antes. En este caso, $x = -1$ es una raíz del polinomio.

Teorema del factor. $(x - a)$ es un factor del polinomio $P(x) \Leftrightarrow x = a$ es una raíz de $P(x)$.
Demostración:
–Si $(x - a)$ es un factor del polinomio $P(x) \Rightarrow P(x) = (x-a)\cdot Q(x)$. Esto es, la división es exacta. En consecuencia, el resto es 0. Luego, por el teorema del resto, $P(a) = 0$. Por tanto, $x = a$ es una raíz de $P(x)$.
–Si $x = a$ es una raíz de $P(x) \Rightarrow P(a) = 0$, y, por lo mismo (por el teorema del resto), la división $P(x) : (x - a)$ es exacta. Por tanto, $(x - a)$ es un factor de $P(x)$.

Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.
Si se conoce que x_1, x_2 y x_3 son las raíces de $P(x)$, entonces el polinomio es de la forma

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \quad c \text{ es una constante.}$$

Ejemplos:

- Un polinomio de tercer grado cuyas raíces son $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$ es,
$$P(x) = (x+1)(x-2)(x-3) = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$
(También puede ser $P(x) = -5(x+1)(x-2)(x-3)$. Hay infinitos.)
- Las raíces de $P(x) = x^3 - 4x$ son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$ (compruébalo); entonces:
$$P(x) = x(x-2)(x+2)$$

Resumiendo: $x = a$ **es una raíz de** $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a)$ **es un factor de** $P(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(x) = (x - a)\cdot Q(x)$**, siendo** $Q(x)$ **de un grado menor que** $P(x)$**.**

Notas:
1. Conviene saber que un polinomio tiene tantas raíces como indica su grado (esas raíces pueden ser simples, múltiples (repetidas) o complejas; en este último caso no se hallan).
En consecuencia, un polinomio de grado n tiene un máximo de n factores irreducibles.
2. Si un polinomio tiene raíces enteras estas deben ser divisores del término independiente. Por ejemplo, si el término independiente fuese 15, las raíces enteras, si las hubiese, hay que buscarlas entre los números 1 y –1, 3 y –3, 5 y –5, 15 y –15.

Regla de Ruffini: división de $P(x)$ entre $(x - a)$

Sólo puede utilizarse para dividir un polinomio cualquiera entre el binomio $x - a$.
Para aplicar la regla, los coeficientes del dividendo se colocan ordenados (de mayor a menor grado, incluido el término independiente); si faltase alguno de ellos, se pone un 0.

Ejemplos:

- Para dividir $(2x^3 - 3x):(x-2)$ se procede así:

Coeficientes del dividendo		2	0	−3	0	
Valor de a en $x - a$	2		4	8	10	
Coeficientes del cociente		2	4	5	10	← Resto

El cociente de la división es $c(x) = 2x^2 + 4x + 5$; el resto, $r = 10$.

- Análogamente, para dividir $(x^3 - 2x - 1):(x+1)$ se disponen los números así:

	1	0	−2	−1
−1		−1	1	1
	1	−1	−1	0

El cociente de la división es $c(x) = x^2 - x - 1$; el resto, $r = 0$. En este caso, el dividendo es "múltiplo" del divisor. Esto es:

$$(x^3 - 2x - 1) = (x+1)(x^2 - x - 1)$$

También se dice que $(x + 1)$ es un factor de $(x^3 - 2x - 1)$.

2. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de factores irreducibles, los de menor grado posible, como en el ejemplo inmediatamente anterior. (El concepto es análogo al de la descomposición de un número en factores primos. Ejemplo: $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$.)

El teorema del factor permite escribir un polinomio como producto de factores de menor grado. Para ello:
1.º Si puede sacarse factor común x, se saca.
2.º Hay que buscar las raíces. (Se encuentran utilizando los métodos de resolución de ecuaciones; o *a ojo* si el polinomio es de grado mayor o igual a 3, buscando raíces enteras.)
3.º Cuando se conozca alguna raíz, se divide por Ruffini para obtener factores de menor grado, y, por tanto, más cómodos de manejar.
Si $x = a$ es una raíz de $P(x) \to$ se divide por $(x - a)$ y se escribe $P(x) = (x - a) \cdot P_1(x)$.
A continuación, se aplica el mismo proceso a $P_1(x)$.

Ejemplos:

- Para $P(x) = x^3 - 4x$, se puede sacar factor común x ($x = 0$ es una raíz). En consecuencia,

$$P(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$$

Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2;\ x = 2$.
Por tanto, $P(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$

- Para $P(x) = x^3 + 4x$, también se tiene que $P(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$. Pero, como en este caso, la ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene soluciones reales, no es posible hacer una descomponiendo más simple.

- Si $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6$, una raíz es $x = 1$ pues $P(1) = 0 \Rightarrow$ $(x - 1)$ es un factor $\Rightarrow P(x)$ es divisible por $(x - 1)$. Se divide por Ruffini y se obtiene:

$$P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=(x-1)(2x^2-8x+6)= 2(x-1)(x^2-4x+3)$$

Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación $x^2-4x+3=0$. Sus soluciones son $x = 1$ y $x = 3$ $\Rightarrow$ $(x-1)$ y $(x - 3)$ son los factores.
En consecuencia: $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=2(x-1)(x-1)(x-3)=2(x-1)^2(x-3)$.
En este caso, la solución $x = 1$ es doble, pues el factor (x − 1) se repite dos veces.

3. Fracciones algebraicas
Las fracciones algebraicas son aquellas en las que el numerador y el denominador son polinomios. Se operan del mismo modo que las fracciones ordinarias. Son frecuentes los errores de signos y los errores en el (no) empleo de paréntesis.

Suma

$$\frac{A(x)}{B(x)}\pm\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot D(x)\pm C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}; \qquad \frac{A(x)}{B(x)}\pm C(x)=\frac{A(x)\pm C(x)\cdot B(x)}{B(x)}$$

NOTA. Puede ser conveniente, como con las fracciones ordinarias, hallar el m. c. m. de los denominadores; ello simplifica los cálculos.

Ejemplos:

- $$\frac{x^2}{x+1}+\frac{1-2x^2}{2x+3}=\frac{x^2(2x+3)+(1-2x^2)(x+1)}{(x+1)(2x+3)}=$$
$$=\frac{2x^3+3x^2+x+1-2x^3-2x^2}{(x+1)(2x+3)}=\frac{x^2+x+1}{(x+1)(2x+3)}$$

Nota: Salvo indicación en contra puede convenir no operar el denominador.

- $$\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}=(\text{mcm}=x^2-1)=\frac{x^2(x-1)}{x^2-1}-\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1} \quad (1)$$
- $$\frac{2x^2-4}{x+1}-2x=\frac{2x^2-4-2x^2-2x}{x+1}=-\frac{2x+4}{x+1}$$
- $$2-\frac{3x-2}{2x+1}=\frac{4x+2-3x+2}{2x+1}=\frac{x+4}{2x+1}$$

Producto y división

$$\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot C(x)}{B(x)\cdot D(x)}; \qquad \frac{A(x)}{B(x)}:\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot C(x)}$$

Ejemplos:

- $$\frac{2x-2}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{x-1}=\frac{(2x-2)x^2}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{2x^3-2x^2}{x^3-x^2+x-1} \quad (2)$$
- $$\frac{\frac{x^2-1}{2x+1}}{x}=\frac{x^2-1}{x(2x+1)}=\frac{x^2-1}{2x^2+x}$$
- $$\frac{x^2-9}{2x+1}:\frac{x+3}{3-x}=\frac{(x^2-9)\cdot(3-x)}{(2x+1)(x+3)}=\frac{(x+3)(x-3)(3-x)}{(2x+1)(x+3)}=-\frac{(x-3)^2}{2x+1}$$

- **Simplificación de fracciones algebraicas**

La simplificación de fracciones algebraicas es objeto de frecuentes errores, pero se simplifican igual que las fracciones ordinarias: dividiendo numerador y denominador por factores comunes. (La clave está en el factor común).
Para simplificar al máximo habrá que factorizar los polinomios numerador y denominador.

Ejemplos:

- Las expresiones (1) y (2) vistas más arriba se deberían haber simplificado. Así:

(1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{x+1}$.

(2) $\frac{2x-2}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{x-1}=\frac{(2x-2)x^2}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{2(x-1)x^2}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{2x^2}{x^2+1}$

Observación: En la simplificación de fracciones algebraicas son frecuentes los errores.

- Está MAL: $\frac{2x^5-x^3}{x^4}=\frac{2x-x^3}{1}$; sigue mal: $\frac{2x^5-x^3}{x^4}=\frac{2x^5-1}{x}$
- Lo correcto es: $\frac{2x^5-x^3}{x^4}=\frac{x^3(2x^2-1)}{x^4}=\frac{2x^2-1}{x}$
- Está MAL: $\frac{(2x-1)(x-1)^2-(x^2-x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^3}$
- Lo correcto es: $\frac{(2x-1)(x-1)^2-(x^2-x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x)\cdot 2}{(x-1)^3}=$

$$=\frac{(2x-1)(x-1)-x(x-1)\cdot 2}{(x-1)^3}=\frac{2x-1-2x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

- **Descomposición en fracciones simples**

Cuando el denominador de una fracción algebraica puede descomponerse en factores, la fracción se puede escribir como suma (o diferencia) de otras fracciones más sencillas. Este proceso se conoce con el nombre de descomposición en fracciones simples.

- Estudio de los casos más fáciles: descomposición de la fracción $F(x)=\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$

Caso 1. El denominador es un polinomio de 2º grado con dos raíces reales simples. Esto es, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones distintas, $x=x_1$ y $x=x_2$. (Esto significa que $x^2+x-2=a(x-x_1)(x-x_2)$). La descomposición que se hace es:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{a(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)},$$

los valores de A y B, que son números, se determinan por el llamado método de *identificación de coeficientes*.

Ejemplo:

- Sea $F(x)=\frac{2x+3}{x^2+x-2}$.

Como las soluciones de $x^2+x-2=0$ son $x=1$ y $x=-2$ ($\Leftrightarrow$ $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$), la descomposición que se hace es:

$$\frac{2x+3}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$ → se han sumado las dos fracciones simples.

La fracción dada y la obtenida al sumar las dos fracciones simples son iguales. Luego, como sus denominadores son iguales, también deben serlo sus numeradores. En consecuencia:

$$2x+3=A(x+2)+B(x-1) \Leftrightarrow 2x+3=(A+B)x+2A-B \Rightarrow \begin{cases} 2=A+B \\ 3=2A-B \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtienen los valores de A y B.

De otro modo: Si en la primera igualdad se dan a x dos valores se obtienen directamente A y B. Los valores más cómodos son $x = 1$ y $x = 2$ (las raíces halladas). Así:

si $x = 1$: $5 = 3A \Rightarrow A = 5/3$

si $x = -2$: $-1 = -3B \Rightarrow B = 1/3$

Por tanto: $\frac{2x+3}{x^2+x-2}=\frac{5/3}{x-1}+\frac{1/3}{x+2}$

Caso 2. El denominador es un polinomio de 2º grado con una raíz real doble. Esto es, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene una solución doble: $x = x_1$. (Esto significa que $x^2+x-2=a(x-x_1)^2$). La descomposición que se hace es:

La descomposición que se hace es:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{a(x-x_1)^2}+\frac{B}{(x-x_1)}\ .$$

Los valores de A y B, que son números se determinan como en el caso anterior.

Ejemplo:

- Sea $F(x)=\frac{3x-5}{x^2-6x+9}$

Como la ecuación $x^2-6x+9=0$ tiene la solución doble $x = 3$, la descomposición que se hace es:

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+9}=\frac{A}{(x-3)^2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A+B(x-3)}{(x-3)^2}$$ → se han sumado las dos fracciones simples.

Como antes, la fracción dada y la obtenida al sumar las dos fracciones simples son iguales. Al ser iguales sus denominadores, también lo serán sus numeradores. En consecuencia:

$$3x-5=A+B(x-3)$$

Si en esta igualdad se dan a x dos valores se obtiene un sistema que permite calcular A y B. Los valores más cómodos son $x = 3$ y $x = 0$ (uno de ellos es la raíz del denominador). Se tiene:

si $x = 3$: $4 = A \Rightarrow A = 4$

si $x = 0$: $-5 = A - 3B \Rightarrow B = 3$

Por tanto:

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+9}=\frac{4}{(x-3)^2}+\frac{3}{x-3}$$

Caso 3. Si la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tiene raíces reales, la fracción $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ no se puede descomponer de una manera simple.