Prueba de nivel

Soluciones comentadas

1. Halla el valor de $3^2 - 3\cdot\left(1 + (-2)^3\right)^2$

Sol. Prioridad de las operaciones; paréntesis; potencias.

$$3^2 - 3\cdot\left(1 + (-2)^3\right)^2 = 9 - 3\cdot(1 + (-8))^2 = 9 - 3\cdot(1 - 8)^2 = 9 - 3\cdot 7^2 = 9 - 3\cdot 49$$
$$= 9 - 147 = -138$$

2. La operación entre dos números enteros, X e Y, simbolizada por ☺, se define como sigue:

X ☺ Y = 2X + 5Y

a) ¿Es conmutativa?
b) ¿Cuánto vale X ☺ (X ☺ X)?

Sol. Trabajar a partir de una definición.
a) La propiedad conmutativa se cumpliría si X ☺ Y = Y ☺ X.
No es conmutativa, pues Y ☺ X = 2Y + 5X, que es distinto de 2X + 5Y.

b) X ☺ (X ☺ X) = X ☺ (2X+ 5X) = X ☺ (7X) = 2X + 5 · (7X) =
= 2X + 35X = 37X

<u>Observaciones:</u>
1. También podría verse que (X ☺ X) ☺ X = (7X) ☺ X = 14X + 5X = 19X.
Por tanto, la colocación de paréntesis se hace necesaria.
2. ¿Se comportará esta operación como un operador lineal? Esto es, cumplirá:
i) k(X ☺ Y) = kX ☺ kY
ii) (X + X´) ☺ (Y + Y´) = X ☺ Y + X´☺ Y´

3. Halla: $\left(2 - \frac{3}{8}\right)\cdot\frac{8}{3} - \frac{1}{3}$

Sol. Operaciones con fracciones; paréntesis

$$\left(2 - \frac{3}{8}\right)\cdot\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \left(\frac{16}{8} - \frac{3}{8}\right)\cdot\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{13}{8}\cdot\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{13}{3} - \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Posible **error**: $\left(2 - \frac{3}{8}\right)\cdot\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \left(2 - \frac{3}{8}\right)\cdot\frac{7}{3}$

4. Simplifica: $\frac{6^4 \cdot 3^8}{9^5 \cdot 2^3}$

Sol. Descomposición de un número en factores; propiedades de las potencias; simplificación de una fracción.

$$\frac{6^4 \cdot 3^8}{9^5 \cdot 2^3} = \frac{(3\cdot 2)^4 \cdot 3^8}{(3^2)^5 \cdot 2^3} = \frac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^8}{3^{10} \cdot 2^3} = \frac{3^{12} \cdot 2}{3^{10}} = 3^2 \cdot 2 = 18$$

5. Simplifica la expresión: $\left(\sqrt{2}-3\right)^2-3\cdot\left(2\sqrt{2}+4\right)$

Sol. Operaciones con raíces; cuadrado de un binomio.

$\left(\sqrt{2}-3\right)^2-3\cdot\left(2\sqrt{2}+4\right)=$

$=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot3\sqrt{2}+3^2-3\cdot2\sqrt{2}-12=2-6\sqrt{2}+9-6\sqrt{2}-12=$

$=-1-12\sqrt{2}$

6. En la siguiente tabla, calcula los valores de *a* y *b* sabiendo que las magnitudes A y B son directamente proporcionales

Magnitud A	3	4	*a*
Magnitud B	12	*b*	24

Sol. Proporcionalidad directa.

Debe cumplirse que $\dfrac{3}{12}=\dfrac{4}{b}=\dfrac{a}{24}\Rightarrow\begin{cases}3b=48\rightarrow b=16\\ 3\cdot24=12a\rightarrow a=6\end{cases}$

7. ¿En cuánto se convierten 300 € al 4 % de interés compuesto en 3 años?

Sol. Proporcionalidad directa; función exponencial.

Inicial	1 año	2 años	3 años	Total
300 al 4 % → Tanto por uno r = 0,04	300 · (1 + 0,04) = 300 · 1,04	$300\cdot10{,}4^2$	$300\cdot1{,}04^3$	337,50 €

8. La verificación o no de una determinada propiedad (*P*) depende del valor que tome un parámetro $m\in\mathbf{R}$. Se sabe que dicha propiedad no se cumple cuando $m=1$ o $m=3$. Con esto, indica la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones relativas a *P*.

La propiedad *P* se cumple:

a) Si $m=3$ b) Para todo $m>3$ c) Para todo $m<3$.

d) Si $m\neq3$ e) Si $m\neq1$ f) Si $m\in(1,3)$

Sol. Lógica de proposiciones.

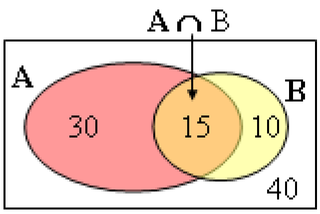
a) Falsa; b) Verdadera; c) F, pues *m* puede tomar el valor 1;

d) F, pues *m* puede tomar el valor 1; e) F, pues *m* puede tomar el valor 3; f) V

9. En un grupo de personas se han examinado dos características, A y B.
El resultado ha sido:

- 45 de ellas cumplen la característica A;
- 25, cumplen la característica B;
- 15, cumplen ambas características;
- 40, no cumplen ninguna característica.

Con ayuda del diagrama adjunto calcula el número de personas que había en el grupo.



Sol. En $A\cap B$ hay 15 elementos. Sólo en A habrá 30. Solo en B, 10. Y 40, fuera de $A\cup B$.
En total: 30 + 15 + 10 + 40 = 95.

10. El logaritmo de un número *x*, en una base *a*, es otro número *b*, y se define así:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

Por ejemplo: $\log_2 16 = 4$, pues $2^4 = 16$.

a) ¿Cuánto vale $\log_6 36$?

b) ¿Cuánto debe ser *x* para que $\log_{10} x = 6$?

Sol. Aplicando una definición.

a) $\log_6 36 = b \Leftrightarrow 6^b = 36 \Rightarrow b = 2$

b) $\log_{10} x = 6 \Leftrightarrow 10^6 = x \Rightarrow x = 1000000$

11. La relación entre las escalas termométricas Celsius y Fahrenheit viene dada por la expresión $\frac{F-32}{9} = \frac{C}{5}$.

¿A cuántos grados Celsius equivalen 122 ºF?

Sol. Aplicando una fórmula.

Si $F = 122 \Rightarrow \frac{122-32}{9} = \frac{C}{5} \Rightarrow 10 = \frac{C}{5} \Rightarrow C = 50$ ºC

12. Simplifica:

a) $\frac{4x^2y^3}{2x^3y}$ b) $\frac{12x-4}{4}$

Sol. Simplificación de fracciones; factor común.

a) $\frac{4x^2y^3}{2x^3y} = \frac{2\cdot(2x^2\cdot y)\cdot y^2}{(2x^2y)\cdot x} = \frac{2y^2}{x}$

b) $\frac{12x-4}{4} = \frac{4(3x-1)}{4} = 3x-1$

13. Desarrolla y simplifica: $(4-x^2)(4+x^2)-3(x^2-5)^2+5x(3+x)^2$

Sol. Operaciones con polinomios.

$(4-x^2)(4+x^2)-3(x^2-5)^2+5x(3+x)^2$ = (suma por diferencia y cuadrado de un binomio) = $(16-x^4)-3(x^4-10x^2+25)+5x(9+6x+x^2) =$

$= 16-x^4-3x^4+30x^2-75+45x+30x^2+5x^3 =$

$= -4x^4+5x^3+60x^2+45x-49$

14. Resuelve la ecuación: $\frac{2x-3}{3} - x = 1 - \frac{4-5x}{5}$

Sol. Ecuaciones. Reglas de resolución.

$\frac{2x-3}{3} - x = 1 - \frac{4-5x}{5} \Rightarrow$ (por 15) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 15\cdot\left(\frac{2x-3}{3}-x\right)=15\cdot\left(1-\frac{4-5x}{5}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5(2x-3)-15x=15-3(4-5x)$$
$$\Rightarrow 10x-15-15x=15-12+15x$$
$$\Rightarrow 10x-15x-15x=15-12+15$$
$$\Rightarrow -20x=+18 \Rightarrow x=-\frac{18}{20}=-0{,}9$$

15. Resuelve las siguientes:

a) $3x^2+6x=0$

b) $3x^2-48=0$

Sol. Ecuación de 2º grado, incompleta.

a) $3x^2+6x=0 \Leftrightarrow 3x(x+2)=0 \Rightarrow x=0$ o $x=-2$

b) $3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3x^2=48 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$

16. Descompón en factores el polinomio $P(x)=x^3-4x^2+3x$.

Sol. Raíz de un polinomio. Factor común.
Hay que saber: $x = a$ es una raíz de P(x) $\Leftrightarrow$ P(a) = 0.

$P(x)=x^3-4x^2+3x \Rightarrow P(x)=x(x^2-4x+3) \rightarrow$
$\rightarrow$ resolviendo $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x = 1$; $x = 3$ son raíces de $P(x) \Rightarrow x-1$ y $x-3$ son factores.
Luego,

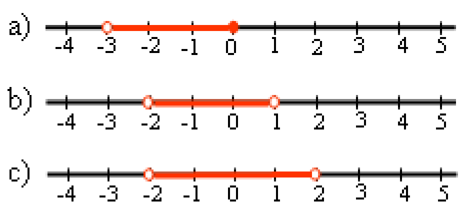
$$P(x)=x^3-4x^2+3x=x(x-1)(x-3)$$

Teorema del factor. $x = a$ es una raíz de P(x) $\Leftrightarrow$ $(x-a)$ es un factor del polinomio P(x)

17. Representa gráficamente los intervalos:

a) $(-3, 0]$ b) $-2 < x < 1$ c) $|x| < 2$

Sol. La recta real.



Recordar: $|x| <$ n $\Leftrightarrow -n < x < n$

18. Resuelve las inecuaciones:

a) $\dfrac{2x-1}{3}<\dfrac{x}{2}$ b) $x+3<3x-1$

Sol. Inecuaciones.

a) $\dfrac{2x-1}{3} < \dfrac{x}{2} \Rightarrow 2(2x-1) < 3x \Rightarrow 4x-2 < 3x \Rightarrow x < 2$

b) $x+3 < 3x-1 \Rightarrow x-3x < -1-3 \Rightarrow -2x < -4 \Rightarrow x > 2$

Un posible **error** es: $-2x < -4 \Rightarrow x < \dfrac{-4}{-2} \Leftrightarrow x < 2$.

Propiedad:

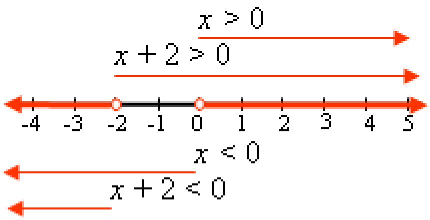
- A < B ⇔ A · n < B · n, si n > 0 También: A/n < B/n, si n > 0
- A **<** B ⇔ A · n **>** B · n, si n < 0 También: A/n > B/n, si n < 0

19. Resuelve $x^2 + 2x > 0$.

Sol. Inecuaciones y regla de los signos.

$x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2$ o $x > 0$

Ambos factores positivos: (+) · (+) = (+)

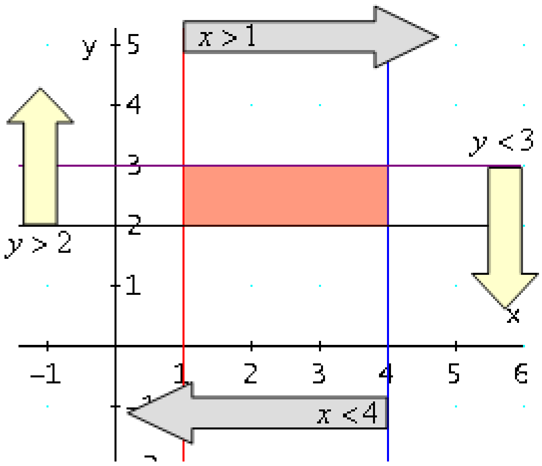


Ambos factores negativos: (–) · (–) = (–)

20. Representa en el plano la región *D*, definida por

$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 1 \le x \le 4,\ 2 \le y \le 3\}$

Sol. El plano cartesiano



Observación:

En la recta, $x > 1$ es un intervalo.

En el plano, $x > 1$ es un semiplano.

21. Para el sistema $\begin{cases} 2xy(y-2) = 0 \\ 2(x^2-1)(y-1) = 0 \end{cases}$, indica cuáles de los pares siguientes son solución de él:

a) (0, 1) b) (0, 2) c) (–1, 0) d) (1, 2) e) (0, –1)

Sol. Solución de un sistema.
El par (0, 1) indica que $x = 0$ e $y = 1$; lo mismos para los demás pares.
Las soluciones de un sistema son los valores de x e y que verifican todas las ecuaciones.
a) (0, 1) es solución
b) (0, 2) no verifica la segunda ecuación.
c) (−1, 0) es solución.
d) (1, 2) es solución.
e) (0, −1) no verifica la segunda ecuación

Observación: ¿Cómo se resolvería este sistema?

22. Resuelve la ecuación $\dfrac{1}{2^x} = 32$

Sol. Ecuaciones exponenciales; potenciación.
Para resolver $\dfrac{1}{2^x} = 32$, hay que expresarla en la forma $2^{-x} = 32 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^5 \Rightarrow$ $x = -5$.

23. Resuelve la ecuación $x - \sqrt{x} = 6$

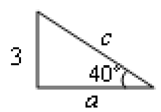
Sol. Ecuaciones con raíces.
Se aísla la raíz y se eleva al cuadrado.
$x - \sqrt{x} = 6 \;\Rightarrow\; x - 6 = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; (x-6)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \;\Rightarrow\; x^2 - 12x + 36 = x \;\Rightarrow$
$x^2 - 13x + 36 = 0 \;\Rightarrow\; x = 9,\; x = 4.$

Observación:
La solución $x = 4$ no es válida. → (Si no resulta muy engorroso, siempre conviene comprobar los resultados.)

24. Un restaurante ofrece para comer: "*6 primeros platos y 5 segundos platos*". Si en el restaurante hay comiendo 19 personas, ¿es posible que cada una tome un menú diferente?
Justifica tu respuesta.

Sol. Principio multiplicativo: imprescindible para el recuento de casos.
Pueden servirse 6 × 5 menús distintos.

25. Halla a y c en el siguiente triángulo



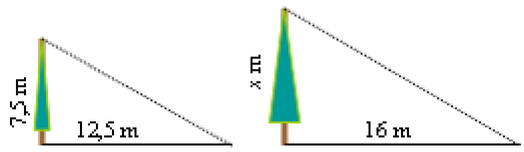
(Otros datos: sen 40º = 0,64; cos 40º = 0,77; tan 40º = 0,84)

Sol. Trigonometría básica.

$\sin 40° = \frac{3}{c} \Rightarrow c = \frac{3}{0{,}64} = 4{,}69$; $\quad \cos 40° = \frac{a}{c}$; $\quad \tan 40° = \frac{3}{a} \Rightarrow$

$a = \frac{3}{0{,}84} 3{,}57$

26. Un árbol que mide 7,5 m proyecta una sombra de 12,5 m. ¿Cuánto medirá otro árbol si la sombra que proyecta es de 16 m?

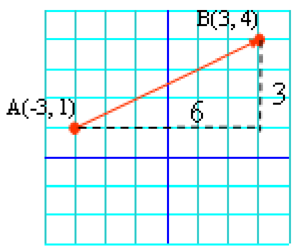


Sol. Teorema e Tales; proporcionalidad

$$\frac{7{,}5}{12{,}5} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = 9{,}6 \text{ m}$$

27. Representa los puntos A = (–3, 1) y B = (3, 4).
Dibuja el vector **AB** y halla su módulo.

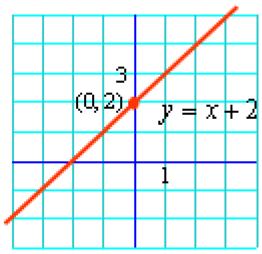
Sol. El plano cartesiano. Módulo de un vector (Pitágoras)



Distancia de A a B = $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

28. Representa la recta de pendiente 1 que pasa por el punto (0, 2). ¿Cuál es su ecuación?

Sol. Ecuación de una recta en el plano.

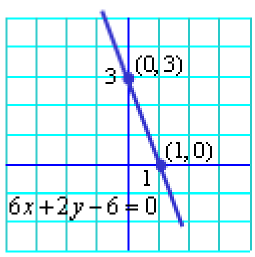


La ecuación de una recta en el plano es $y = mx + n$, siendo m la pendiente (la medida de la inclinación), y n, la ordenada en el origen (el punto de corte con el eje OY.)

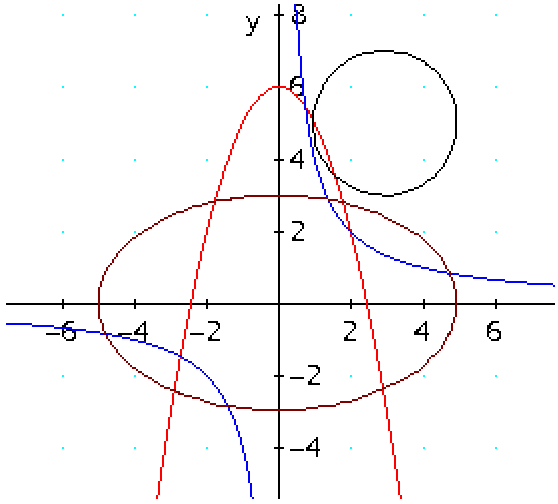
29. ¿En qué puntos corta la recta $6x + 2y - 6 = 0$ a los ejes de coordenadas? Representa dicha recta.

Sol. Corte de una recta con los ejes (vale para cualquier curva.)
En el corte con OY la x vale 0 $\Rightarrow 6 \cdot 0 + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$.

En el corte con OX la y vale 0 $\Rightarrow 6x + 2 \cdot 0 - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$.



30. Empareja cada cónica con su ecuación y con su gráfica.



Cónica:
Circunferencia. Elipse. Hipérbola. Parábola.

Ecuaciones:

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ b) $(x-3)^2+(y-5)^2=4$

c) $y=-x^2+6$ d) $xy=4$

Sol. Ecuación de una cónica.

- La ecuación de una elipse centrada en el origen, de semiejes *a* y *b* es $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

En este caso, $a = 5$; $b = 3$

- La ecuación de una circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio *r* es $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

En este caso, $x_0 = 3$; $y_0 = 5$; $r = 2$.

- La ecuación de una hipérbola centrada en el origen, de semiejes *a* y *b* es $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
- La ecuación de una hipérbola equilátera es $xy=k$.

En este caso, $k = 4$.

- La ecuación de una parábola de eje vertical es $y=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$.
- La ecuación de una parábola de eje horizontal es $x=ay^2+by+c$, $a \neq 0$.

31. Da un punto de cada una de las ecuaciones anteriores.

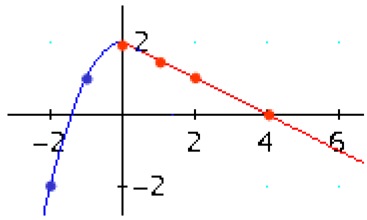
Sol. Puntos de una gráfica.
Un punto pertenece a una gráfica cuando cumple su ecuación.
Para encontrar puntos de una gráfica puede procederse por tanteo. Puede dar resultado dar a *x* o a *y* el valor 0.
a) Si $x = 0$; $y = 3$. Punto (0, 3) $\to$ Otro: (5, 0)
b) Si $x = 0$? Aquí no es posible. Pero, si x = 3; $y = 3$. Punto (3, 3).
c) Si $x = 0$; $y = 6$. Punto (0, 6) $\to$ Otro: (−1, 5)
d) Si $x = 4$; $y = 1$. Punto (4, 1)

32. Dada la función $f(x)=\sqrt{2x-6}$, halla $f(35)$ y $f(1)$. ¿Cuál es su dominio?

Sol. Funciones
$f(35)=\sqrt{2\cdot 35-6}=8$.
$f(1)=\sqrt{2\cdot 1-6}=\sqrt{-4}$ $\to$ no está definida.
La función está definida cuando $2x-6\geq 0$ $\to x \geq 3$. Dom f = [3, +∞)

33. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & x<0 \\ -0{,}5x+2 & x\geq 0 \end{cases}$. ¿Es continua?

Sol. Gráfica de una función.
Dando valores a x se obtienen algunos puntos:
(−2, −2); (−1, 1); si $x \to 0$, $f(x) \to 2$;
(0, 2); (1, 1,5); (2, 1); (4, 0)



Es continua.

34. Sea $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$. Se pide:
a) Su dominio.
b) Su límite cuando $x \to -5$, $x \to 0$ y $x \to 5$.
c) ¿Tiene alguna asíntota?

Sol. Funciones; límites
a) Dom f = **R** − {5}
b) Sustituyendo: $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\left[\dfrac{0}{-10}\right]=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\dfrac{-25}{-5}=5$

Hay que simplificar: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}(x+5)=10$

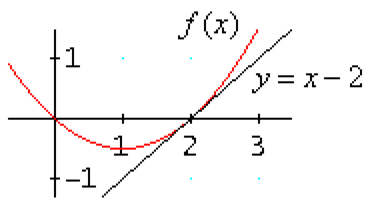
c) No tiene asíntotas.

<u>Comentario</u>. ¿Qué son las asíntotas? ¿Qué debe cumplirse para que existan?

35. Dada la función $f(x)=3x^4-2x^3+x-7$.
a) Halla su derivada.
b) ¿Cuánto vale $f'(0)$?; ¿y $f'(-1)$?

Sol. Derivadas.
a) $f'(x)=12x^3-6x^2+1$;
b) $f'(0)=1$?; $f'(-1)=-17$

36. Observa la gráfica adjunta y contesta:
a) ¿Cuánto vale $f'(2)$?
b) ¿Y $f'(1)$?



Sol. Interpretación de la derivada.
a) La derivada de una función (en un punto) da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función (en ese punto).
En x = 2, la recta tangente tiene pendiente 1, luego $f'(2)$ = 1.
b) Si en x = 1, como parece, se da el mínimo de la función, entonces, $f'(1)=0$.