Las demostraciones (los problemas) y los puzzles

El proceso lógico, por el que a partir de una proposición (una premisa *p*) se llega a la veracidad de otra proposición (una conclusión *q*), se llama demostración del teorema $p \Rightarrow q$.
Hacer una demostración no es tarea fácil. Por eso, en Matemáticas se han desarrollado una serie de métodos que facilitan el camino: deducción; reducción al absurdo; inducción; métodos geométricos...
La deducción, el método directo, se apoya en que, de ser cierta la premisa y el proceso, entonces la conclusión también es cierta: si *p* y $p \Rightarrow q$ son ciertas, entonces también lo es *q*.
La demostración por reducción al absurdo consiste en suponer que la conclusión es falsa (que *q* es falsa) y probar que de ello se deduce alguna contradicción en *p*.
La demostración por inducción básicamente consiste en demostrar que una propiedad (una implicación, un teorema) es cierta para el siguiente de cualquier número natural *n*. Por tanto, si es cierta para 1, lo será para 2, y para 3, y *así sucesivamente*. (En documento anterior, "Lenguaje, objetos matemáticos", se ha mostrado el método.)

Ejemplos:

a) Método directo. Demostración de que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Basta con hacer: $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

b) Por reducción al absurdo. Demostración de que $\sqrt{2}$ no es racional.

1.º Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional y que, por tanto, puede escribirse como una fracción, que supondremos reducida. Esto es, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, con *p* y *q* primos entre sí.

2.º Si elevamos al cuadrado ambos miembros se tendrá: $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$

3.º Si $p^2 = 2q^2 \Rightarrow p$ es par, luego $p = 2m$; y, por tanto: $p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow (2m)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4m^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2m^2 = q^2$

4.º La igualdad última indica que *q* también es par. En consecuencia, *p* y *q* son, ambos, múltiplos de 2.

5.º El punto anterior entra en contradicción con el primero, que afirmaba que *p* y *q* eran primos entre sí. Por tanto, el punto de partida, que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ irreducible, es erróneo. Luego, $\sqrt{2}$ no es racional.

• Saber el método adecuado facilita la demostración, aunque siempre pueden surgir sorpresas. De cualquier manera, para tranquilidad del estudiante, en matemáticas elementales la mayoría de las demostraciones consisten en colocar una serie de "piezas" para formar una determinada "figura"; algo similar a la resolución de un puzzle. Por eso, a veces, a un objeto matemático (que será una propiedad, una igualdad o lo que sea) habrá que darle la vuelta o considerarlo desde otra perspectiva, buscando que las piezas encajen; y, como en los puzzles, convendrá empezar "por las esquinas y por los lados", que aquí serán las propiedades ciertas o las evidencias: eso no se pondrá en duda; de modo que si la demostración no encaja no será por esa pieza, por esa relación, será por alguna otra cosa. Ah, y si una pieza está metida a presión o superpuesta, la demostración posiblemente no sea tal.