

Las demostraciones matemáticas

“La demostración” es uno de los elementos constitutivos de la Matemática. Hacer una demostración consiste en probar, a partir de principios ciertos (supuestos ciertos) y mediante deducciones lógicas (y también ciertas), que una sentencia propuesta es verdadera. Es clásica la distinción de tres fases en una demostración:

- 1.º Hipótesis: aquello que se sabe; el punto de partida; lo que se cumple. Lo que se da por cierto.
- 2.º Tesis: aquello que se deduce; el punto de llegada; lo que se cumplirá. Lo que quiere probarse que también es cierto.
- 3.º Demostración: es el proceso lógico que nos asegura que de tal hipótesis se puede deducir dicha tesis.

Una demostración confirma que una determinada conjetura sobre una relación entre los objetos considerados es verdadera, y, por tanto, se puede aplicar siempre, independientemente de las circunstancias. Luego, una demostración va más allá que una mera comprobación. En cambio, para demostrar que una proposición es falsa basta con comprobar que no se cumple en algún caso. Ese caso recibe el nombre de *contraejemplo*.

Ejemplo:

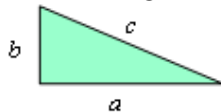
Veamos estas fases con el conocido teorema de Pitágoras, cuya formulación es: “En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es iguala a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos”.

Hipótesis: En todo triángulo rectángulo.

Tesis: el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos:

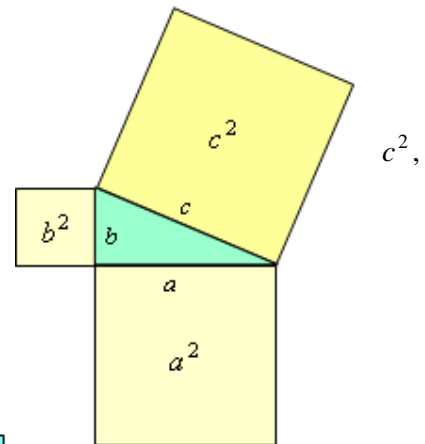
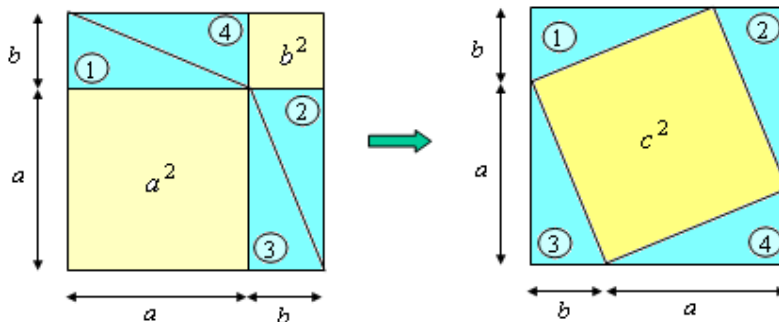
Demostración:

Partamos de un triángulo rectángulo de catetos a y b y de hipotenusa c .



Hay que demostrar que el área del cuadrado de lado c , que vale es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados a y b , cuyos valores respectivos son a^2 y b^2 . Esto es, hay que demostrar que $c^2 = a^2 + b^2$

Para demostrarlo construimos dos cuadrados de lado $a + b$.



En la figura de la izquierda, $a^2 + b^2$ es todo el cuadrado (el de lado $a + b$) menos los dos rectángulos coloreados, cuya superficie

es la de cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b (numerados del 1 al 4). En el segundo, c^2 es todo el cuadrado grande menos la superficie de los cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b , también numerados. Luego, es evidente que $c^2 = a^2 + b^2$.

El teorema de Pitágoras es *de ida y vuelta*. Esto es: si un triángulo es rectángulo, de catetos a y b y de hipotenusa c , se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$. Y al revés, si en un triángulo de lados a , b y c se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces, dicho triángulo es rectángulo y su hipotenusa es c .