TEORÍA DE CONJUNTOS: IDEAS BÁSICAS

Conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos. A cada uno de esos objetos se llama elemento del conjunto.

Un conjunto puede darse enumerando todos y cada uno de los elementos que lo forman. Cuando tal enumeración sea larga o imposible se recurre a fórmulas de recurrencia o a expresiones generalistas. Los conjuntos suelen designarse mediante letras mayúsculas, A, B, C…. Los elementos del conjunto se escriben entre llaves; así: A = {a, b, c…}.

El *conjunto vacío* no tiene ningún elemento. Se representa por la letra ∅. Este conjunto se define como una necesidad teórica; se necesita para aceptar algunas propiedades.

Relación de pertenencia

Un elemento pertenece a un conjunto cuando es de él. Si el elemento a pertenece al conjunto A se escribe $a \in$ A. Si el elemento p no pertenece al conjunto A se escribe $p \notin$ A.

Ejemplos:

a) El conjunto de los resultados que se obtienen al tirar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
El elemento 7$\notin$ E.
b) El conjunto de los números naturales es **N** = {1, 2, 3, …}.
El número 10 ∈ **N**, pero 3,2 ∉ **N.**
c) De manera inconcreta nos podemos referir al "conjunto de objetos que una persona lleva en una bolsa"; al "conjunto de personas que trabajan en un edificio".
d) Con las letras **Z**, **Q** y **R** se designan los conjuntos de los números enteros, racionales y reales, respectivamente.
e) La expresión **R** − {−2, 3} indica el conjunto de todos los números reales menos los números −2 y 3.

Subconjuntos

Un subconjunto de A es cualquier conjunto formado por cualquier número de elementos de A. Entre los subconjuntos de A se incluyen el conjunto ∅ y el mismo A.

Para indicar que B es un subconjunto de A se escribe B ⊂ A; y también se lee "B está contenido en A".
Por los dicho antes, ∅ ⊂ A y A ⊂ A.
El símbolo ⊂ puede leerse al revés: ⊃. Esto es, B ⊂ A es lo mismo que A ⊃ B. (La parte abierta señala al conjunto mayor.)
No debe escribirse B ∈ A para indicar la relación B ⊂ A.
En cambio, si $a \in$ A puede escribirse $\{a\} \subset$ A. Al meter el elemento a entre llaves se considera el conjunto unitario $\{a\}$.
Si un conjunto C no es subconjunto de A se escribe C $\not\subset$ A.

Un conjunto tiene muchos subconjuntos. Hay subconjuntos con un solo elemento, que podrían llamarse subconjuntos elementales; subconjuntos con dos elementos; etc. (Puede demostrase que si un conjunto A tiene n elementos, el número de subconjuntos de A es 2^n, incluyendo el vacío y el mismo A.)

La relación de contenido cumple las propiedades siguientes.

1. Si $C \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow C \subset A$.
2. Si $A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$.
3. Para todo conjunto A, $\varnothing \subset A$.

Ejemplos:

a) Si E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, algunos subconjuntos de E son:

{1}; {6}; {1, 2}; {2, 5}; {2, 4, 6}; {3, 4, 5, 6}; {1, 3, 4, 5, 6}

En total, E tiene $2^6 = 64$ subconjuntos.

b) En el conjunto de los números reales, los <u>intervalos</u> son subconjuntos de **R**.

Subconjunto complementario de otro

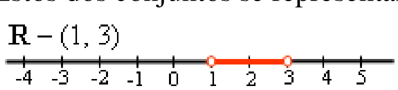
Si B es un subconjunto de A, se llama complementario de B (respecto de A), al subconjunto de A formado por los elementos que no son de B.
El complementario de un conjunto B se representa mediante alguno de los símbolos B^c, B´ o $\overline{B}$. Aquí escribiremos B^c.

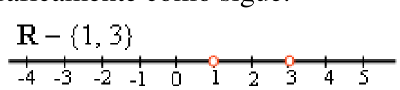
El complementario siempre hace referencia a un todo. Luego, el complementario de B es lo que le falta a B para ser todo.

Ejemplos:

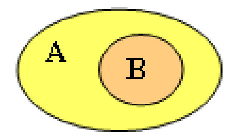
a) Si E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y B = {2, 5} $\Rightarrow B^c$ = {1, 3, 4, 6}.
El complementario de C = {1, 3, 4, 5, 6} es C^c = {2}.

b) En el conjunto de los números reales, el complementario de los números positivos es el conjunto formado por todos los números negativos, más el cero.
También en **R**, el complementario del intervalo (1, 3) puede escribirse así: **R** − (1, 3). Esto no debe confundirse con **R** − {1, 3}, que sería el complementario de dos números; mientras que **R** − (1, 3) es el complementario de todos los números mayores que 1 y menores que 3.
Estos dos conjuntos se representan gráficamente como sigue.

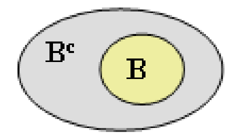




Diagramas de Venn
Una forma frecuente de representar un conjunto es mediante un óvalo, una porción del plano con forma más o menos redondeada. En la figura adjunta de muestra un ejemplo.

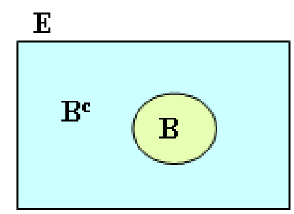


Al meter al conjunto B dentro de A se quiere indicar que $B \subset A$.



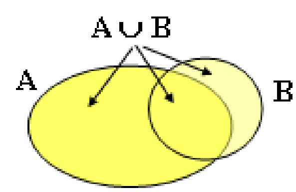
El complementario de B respecto de A es la parte de A que no es B.

Si al conjunto total (el todo) se le llama E, que suele representarse mediante un rectángulo, los conjuntos B y B^c, complementarios uno del otro en E, se representan como se indican en la figura adjunta:



Operaciones con conjuntos
Unión de conjuntos. La unión de dos conjuntos A y B, que de denota por $A \cup B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B. (Elementos que pertenecen a cualquiera de los dos conjuntos.)
Simbólicamente

$$A \cup B = \{x, \text{ tales que } x \in A \text{ o } x \in B\}$$



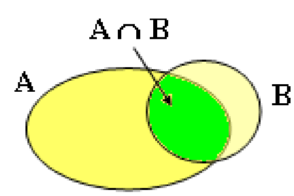
Son evidentes las siguientes propiedades de la unión:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cup \varnothing = A, \quad A \cup A^c = E$$

Si $B \subset A$, entonces $A \cup B = A$.

Intersección de conjuntos. La intersección de dos conjuntos A y B, que de denota por $A \cap B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B. (Elementos comunes a ambos conjuntos.)
Simbólicamente

$$A \cap B = \{x, \text{ tales que } x \in A \text{ y } x \in B\}$$



Son evidentes las siguientes propiedades de la unión:

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap A^c = \varnothing$$

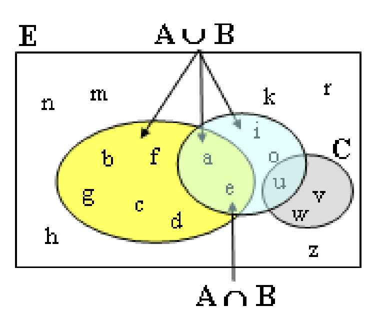
Si $B \subset A$, entonces $A \cap B = B$.

Si $A \cap B = \varnothing$ se dice que los conjuntos A y B son *disjuntos*.

Ejemplos:
a) En el conjunto E de las letras del abecedario se consideran los conjuntos: $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$ y $C = \{u, v, w\}$.
Entonces:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, i, o, u\} \text{ y } A \cap B = \{a, e\}$$

Los conjuntos A y C son disjuntos: $A \cap C = \varnothing$.
El complementario de B son todas las consonantes.

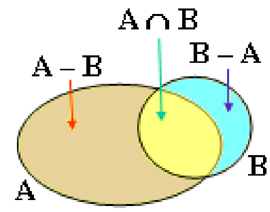


b) Sea $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}$, el conjunto de lo números naturales múltiplos de 3; y $B = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$, el conjunto de los múltiplos de 5. Entonces:

$$A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, \ldots\}$$

$$A \cap B = \{15, 30, 45, \ldots\} \rightarrow \text{los múltiplos comunes de 3 y 5.}$$

Diferencia de conjuntos. La diferencia de dos conjuntos A y B, que de denota por A − B, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, pero no a B. (Elementos de A que no son de B.)



Simbólicamente

$A - B = \{x, \text{ tales que } x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Igualmente,

$B - A = \{x, \text{ tales que } x \in B \text{ y } x \notin A\}$

Es evidente que $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

Ejemplo:

Para los conjuntos: A = {a, b, c, d, e, f, g} y B = {a, e, i, o, u} se tiene:

A − B = {b, c, d, f, g}

B − A = {i, o, u}

Producto cartesiano de conjuntos. El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, que de denota por A × B, es el conjunto formado por los pares de elementos (a, b), donde a ∈ A y b ∈ B.

Simbólicamente

$A \times B = \{(a, b) \text{ tales que } a \in A \text{ y } b \in B\}$

Ejemplo:

a) Para los conjuntos: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y B = {c, x} se tiene:

A × B = {(1, c), (1, x), (2, c), (2, x), …, (6, c), (6, x)}

b) Para los números reales, **R** × **R**, que también puede escribirse como $\mathbf{R}^2$, son los pares de la forma (x, y), que pueden identificarse y representarse como los puntos del plano cartesiano.

Cardinal de un conjunto. Es el número de elementos que tiene ese conjunto.

Ejemplos:

a) El cardinal de los conjuntos A = {a, b, c, d, e, f, g}, B = {a, e, i, o, u} y C = {u, v, w} es, respectivamente, 7, 5 y 3.

b) Para los conjuntos A y B, el cardinal de A ∪ B es 10; y el cardinal de A ∩ B es 2.

c) Para los conjuntos A y C, el cardinal de A ∪ C es 10, mientras que el cardinal de A ∩ C es 0.

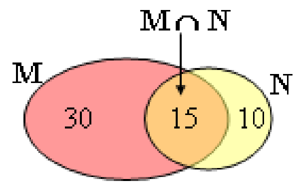
- El cardinal de la unión y de la intersección de conjuntos se relaciona de acuerdo con la siguiente propiedad.

  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Esta propiedad se comprueba fácilmente con el ejemplo precedente.

Ejemplos:

Para aclarar más esta propiedad nos planteamos el siguiente ejercicio:
Sea M un conjunto con 45 elementos, y sea N otro conjunto con 25 elementos. Si $M \cap N$ contiene 15 elementos, ¿cuántos contendrá $M \cup N$?
El diagrama adjunto explica la situación.

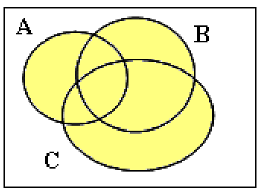


Los 15 elementos de la intersección pertenecen a M y a N, a la vez. Para determinar cuántos hay en la unión, esos 15 elementos sólo deben contarse una vez. Por tanto, en $M \cup N$ habrá 30 + 15 + 10 = 55.
Y se cumple que

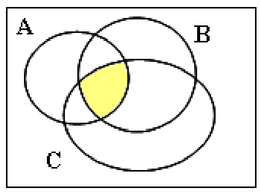
$$\text{card } (A \cup B) = 45 + 25 - 15 = 55$$

Operaciones combinadas. Estas operaciones se pueden extender a más de dos conjuntos y, además, se pueden combinar.

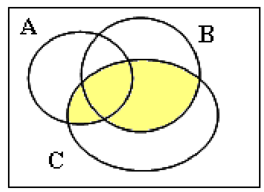
En las siguientes figuras se representan algunos caso.



$A \cup B \cup C$



$A \cap B \cap C$



$(A \cup B) \cap C$

Mediante diagramas de Venn es fácil comprobar las siguientes propiedades:

Conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

Asociativas:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

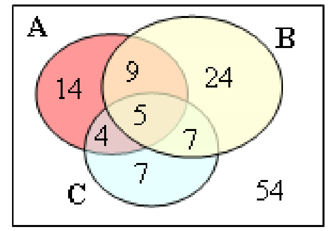
Distributivas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Para determinar cómo se distribuyen los elementos de varios conjuntos y cuál es el cardinal en cada caso, proponemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Supongamos que en una determinada ciudad hay tres periódicos, que llamaremos A, B y C. Se ha preguntado a un grupo de personas sobre su lectura o no de esos periódicos, obteniéndose las respuestas siguientes:
Lectores de A, 32. Lectores de B, 45. Lectores de C, 23.
Lectores de A y B, 14. Lectores de A y C, 9. Lectores de B y C, 12.
Lectores de los tres periódicos, 5.
Número de personas que no leen ninguno de esos tres periódicos, 54.
¿Podríamos saber cuántas personas había en el grupo?



El uso de los diagramas de Venn facilita notablemente la respuesta. Para ello dibujamos los conjuntos A, B y C, superponiéndose en parte. Las partes comunes indican los lectores que leen ambos periódicos; además, se tendrá en cuenta que los lectores que leen varios periódicos, leen cada uno de ellos. Esto es, las 5 personas que leen A, B y C ($A \cap B \cap C$), leen A y B ($A \cap B$), leen A y C ($A \cap C$) y leen B y C ($B \cap C$); y, por supuesto, cada uno de esos 5 leen A, leen B y leen C.
En definitiva, el número de lectores de periódicos es,

$$14 + 9 + 24 + 4 + 5 + 7 + 7 = 70$$

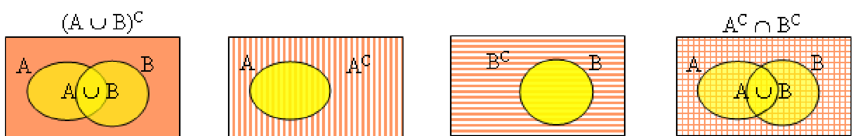
El número total de personas en ese grupo es $70 + 54 = 124$.

Las leyes de De Morgan
Son dos propiedades que tienen una relevancia específica. Establecen la relación entre la unión e intersección de conjuntos y sus complementarios. Dicen lo siguiente:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ → El complementario de la unión es la intersección de los complementarios.

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ → El complementario de la intersección es la unión de los complementarios.

En los gráficos que siguen se demuestra la primera de ellas.



La intersección de A^C (rayado vertical) con B^C (rayado horizontal) es la región cuadriculada, que obviamente coincide con $(A \cup B)^C$.

Ejemplos:
Si M representa el conjunto de los habitantes de Madrid y C el conjunto de los nacidos en Cataluña, entonces:

- $M \cup C$ representa el conjunto de las personas que viven en Madrid o que han nacido en Cataluña.
- $(M \cup C)^c$ representa a las personas que no viven en Madrid o que no han nacido en Cataluña.
- M^c son las personas que no viven Madrid, y C^c aquellos que no han nacido en Cataluña.
- $M^c \cap C^c$ serán las personas que no viven en Madrid y que tampoco han nacido en Cataluña.

Es evidente que $(M \cup C)^c = M^c \cap C^c$.

- Igualmente: $M \cap C$ representa el conjunto de las personas que viven en Madrid y que han nacido en Cataluña.
- $(M \cap C)^c$ representa a las personas que o no viven en Madrid o no han nacido en Cataluña.
- M^c son las personas que no viven Madrid, y C^c aquellos que no han nacido en Cataluña.
- $M^c \cup C^c$ serán las personas que no viven en Madrid o que no han nacido en Cataluña.

Es evidente que $(M \cap C)^c = M^c \cup C^c$.