1. Operaciones con fracciones

- **Equivalencia:**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Para obtener fracciones equivalentes a otra dada, basta con multiplicar o dividir sus términos por un mismo número distinto de cero.

- **Suma:**

Podemos encontrarnos con los siguientes casos:

Caso	❑ **Ejemplos**
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$	❑ $\frac{3}{5}+\frac{1}{8}=\frac{24+5}{40}=\frac{29}{40}$
$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}$	❑ $\frac{7}{4}-\frac{8}{3}=\frac{21-32}{12}=\frac{-11}{12}$
$a\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm c}{d}$	❑ $5+\frac{4}{7}=\frac{35+4}{7}=\frac{37}{7}$
$\frac{a}{b}\pm c=\frac{a\pm cb}{b}$	❑ $\frac{4}{9}-11=\frac{4-99}{9}=-\frac{95}{9}$

En la práctica es conveniente hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores; así se obtienen resultados más simples.

Ejemplo:

❑ La suma $\frac{5}{18}+\frac{11}{24}=\frac{5\cdot 24}{18\cdot 24}+\frac{11\cdot 18}{24\cdot 18}=\frac{120}{432}+\frac{198}{432}=\frac{318}{432}=\frac{53}{72}$

Si hubiésemos hallado fracciones equivalentes a las dadas pero con el mínimo común denominador, m.c.m.(18, 24) = 72, tendríamos:

$$\frac{5}{18}+\frac{11}{24}=\frac{5\cdot 4}{18\cdot 4}+\frac{11\cdot 3}{24\cdot 3}=\frac{20}{72}+\frac{33}{72}=\frac{53}{72}$$

Con la calculadora se hace así: 5 $\boxed{a^{b/c}}$ 18 $\boxed{+}$ 11 $\boxed{a^{b/c}}$ 24 $\boxed{=}$ 53/72

- **Producto**

Fracción por fracción: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ Ejemplo: $\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{-4}{3}\right)=\frac{-8}{15}$

Fracción por número: $a\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{d}$ Ejemplo: $5\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{7}$

- **División:**

Podemos encontrarnos los siguientes casos:

Caso	❑ Ejemplos
$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$	❑ $\frac{6}{7}:\frac{-2}{3}=\frac{18}{-14}=-\frac{9}{7}$
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$ (es lo mismo que antes)	❑ $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{6}}=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$
$a:\frac{c}{d}=\frac{ad}{c}$	❑ $4:\frac{3}{5}=\frac{20}{3}$
$\frac{a}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{c}$ (es lo mismo que antes)	❑ $\frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}$
$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}$	❑ $\frac{2}{5}:3=\frac{2}{15}$
$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc}$ (es lo mismo que antes)	❑ $\frac{\frac{2}{3}}{6}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$

- **Prioridad de operaciones y uso de paréntesis**

Cuando las operaciones aparecen combinadas, primero se resuelven los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones; por último, las sumas y restas.

Lo veremos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio resuelto

Halla el resultado de:

a) $\frac{4}{5}-5\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)$ b) $\frac{4}{5}-5\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}$ c) $\left(\frac{4}{5}-5\right)\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}$ d) $\left(\frac{4}{5}-5\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)$

Solución:

Observa que en los cuatro casos las fracciones y los números son los mismos, la única diferencia es la distinta colocación de los paréntesis.

a) $\frac{4}{5}-5\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{5}-5\cdot\left(\frac{2+9}{6}\right)=\frac{4}{5}-5\cdot\frac{11}{6}=\frac{4}{5}-\frac{55}{6}=\frac{4\cdot 6-55\cdot 5}{30}=-\frac{251}{30}$

b) $\frac{4}{5}-5\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{4}{5}-\frac{5}{3}+\frac{3}{2}=\frac{4\cdot 6-5\cdot 10+3\cdot 15}{30}=\frac{19}{30}$

c) $\left(\frac{4}{5}-5\right)\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{-21}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{-21}{15}+\frac{3}{2}=\frac{-42+45}{30}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$

d) $\left(\frac{4}{5}-5\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{-21}{5}\cdot\frac{11}{6}=\frac{-231}{30}=-\frac{77}{10}$

2. Potenciación de exponente entero

- **Exponente natural**:

Recuerda:

$a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a = a^n$ — Ejemplo: $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = (-2)^3 = -8$

Por convenio: $a^0 = 1$, si $a \neq 0$ — Ejemplo: $5^0 = 1$; $(-3)^0 = 0$; $(0,2)^0 = 1$

- **Exponente entero** (negativo):

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ — Ejemplo: $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$; $\dfrac{3}{x^2} = 3x^{-2}$

- **Reglas prácticas para operar con potencias (propiedades):**

Las propiedades principales de las potencias son:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ — Ejemplo: $3^2 \cdot 3^3 = (9\cdot 27) = 3^5 = 243$

$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$ — Ejemplo: $(3^2)^3 = (9)^3 = 3^6 = 729$

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ — Ejemplo: $\dfrac{4^5}{4^2} = \left(\dfrac{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}{4\cdot4}\right) = 4^3 = 64$

$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ — Ejemplo: $(3a)^2 = 9a^2$; $(-2x^2)^3 = (-2)^3 x^6 = -8x^6$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ — Ejemplo: $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^3 = \dfrac{(-1)^3}{5^3} = \dfrac{-1}{125}$; $\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^5 = \dfrac{2^5}{x^{10}}$

En todos los casos n y m son números enteros.

Advertencias

OJO. Siempre hay que tener en cuenta las reglas de los signos, pues si n es par, $-a^n \neq (-a)^n$, pero si n es impar, es igual.

Ejemplos:

❑ $-2^2 \neq (-2)^2$	$-2^2 = -(2\cdot 2) = -4$;	$(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$
❑ $-3^5 = (-3)^5$	$-3^5 = -(3)^5 = -243$	$(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -243$

OJO. Las potencias *funcionan* bien con los productos y los cocientes. Las fórmulas anteriores no son aplicables a sumas y restas. Lo sentimos: $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$.

Ejemplos:

❑ $(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2$	$(2+3)^2 = 5^2 = 25$	$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$
❑ Recuerda:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejercicio resuelto

Halla, simplificando el resultado, las siguientes operaciones:

a) $(-2)^3 + 3^2 - (5 - 4^2)$

b) $7 - (-2)^3 \cdot (3^2 - 5)$

c) $\dfrac{2-3^2}{1+3^2}$

d) $\left(2 - \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{5}{2^3}$

e) $(5a)^3$

f) $(4x^2)(5x^3)$

g) $\dfrac{2^6 \cdot 15^5}{10^5 \cdot 9^3}$

h) $\dfrac{(-2)^7 \cdot 5^2 - 2^4}{2^5 \cdot 5}$

Solución:

a) $(-2)^3 + 3^2 - (5 - 4^2) = -8 + 9 - (5 - 16) = -8 + 9 - 5 + 16 = 12$

b) $7 - (-2)^3 \cdot (3^2 - 5) = 7 - (-8) \cdot (9 - 5) = 7 + 8 \cdot 4 = 39$

c) $\frac{2-3^2}{1+3^2} = \frac{2-9}{1+9} = -\frac{7}{10}$ [Error] No se te ocurra simplificar así: $\frac{2-3^2}{1+3^2} = \frac{2-1}{1+1}$

d) $\left(2-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{2^3} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{5}{8} = \frac{25}{9} - \frac{5}{8} = \frac{200-45}{72} = \frac{155}{72}$

e) $(5a)^3 = 5^3 a^3 = 125a^3$

f) $\left(4x^2\right) \cdot (5x^3) = 4 \cdot 5x^{2+3} = 20x^5$

g) $\frac{2^6 \cdot 15^5}{10^5 \cdot 9^3} = \frac{2^6 \cdot (3 \cdot 5)^5}{(2 \cdot 5)^5 \cdot (3^2)^3} = \frac{2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^5}{2^5 \cdot 5^5 \cdot 3^6} = \frac{2 \cdot (2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^5)}{(2^5 \cdot 5^5 \cdot 3^5) \cdot 3} = \frac{2}{3}$

h) $\frac{(-2)^7 \cdot 5^2 - 2^4}{2^5 \cdot 5} = \frac{-2^7 \cdot 5^2 - 2^4}{2^5 \cdot 5} = \frac{2^4(-2^3 \cdot 5^2 - 1)}{2^4 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{-8 \cdot 25 - 1}{10} = -\frac{201}{10}$