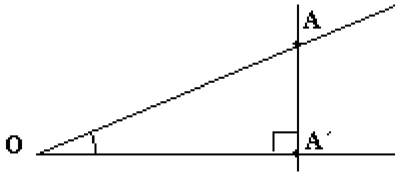
Trigonometría elemental

- **Razones trigonométricas de un ángulo**



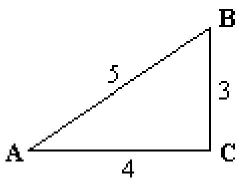
Dado un ángulo cualquiera, si desde un punto de un lado se traza su proyección sobre el otro lado se obtiene un triángulo rectángulo. Esto permite definir:

$$\text{sen}\,\hat{O} = \frac{AA'}{OA} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\hat{O} = \frac{OA'}{OA} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tag}\,\hat{O} = \frac{AA'}{OA'} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

El ángulo O puede medirse en grados o en radianes. (Un radian es un ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio con el que ha sido trazado). La relación entre ambas unidades es 360º = 2π radianes $\rightarrow$ La circunferencia completa abarca 2π radianes. Las calculadoras disponen de las teclas DEG y RAD, para grados y radianes, respectivamente.

Ejemplos:



- Para el triángulo adjunto se tiene:

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad \cos\hat{A} = \frac{4}{5} = 0{,}8; \quad \text{tag}\,\hat{A} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

- Utilizando la calculadora se tiene:

DEG $\rightarrow$	sen 0º = 0;	sen 2º = 0,034899;	sen 30º = 0,5;	sen 60º = 0,866025
RAD $\rightarrow$	sen 0 = 0;	sen 2 = 0,909297;	sen 0,2 = 0,198669;	sen 0,4 = 0,389418
DEG $\rightarrow$	cos 0º = 1;	cos 20º = 0,939693;	cos 30º = 0,866025;	cos 60º = 0,5
RAD $\rightarrow$	cos 0 = 1;	cos 20 = 0,408082;	cos 0,2 = 0,980067;	cos 0,4 = 0,921061

- **Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas de un ángulo**

Como consecuencia de las definiciones, se cumplen:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}; \qquad 1 + \text{tag}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Por tanto, conociendo una cualquiera de las razones trigonométricas se pueden determinar las demás.

Nota: Aclaramos algunas cuestiones de notación:

$$\text{sen}^2\alpha = (\text{sen}\,\alpha)^2 = (\text{sen}\,\alpha)\cdot(\text{sen}\,\alpha)\,;\ \cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2;\ \text{tag}^2\alpha = (\text{tag}\,\alpha)^2$$

$$\text{sen}\,\alpha^2 = \text{sen}(\alpha^2) = \text{sen}(\alpha\cdot\alpha)$$

OJO: $\text{sen}\,\alpha\cdot 2 = 2\text{sen}\,\alpha \neq \text{sen}\,(\alpha\cdot 2) = \text{sen}\,(2\alpha) = \text{sen}\,2\alpha$

Ejemplos:

- Si se sabe que $\text{sen}\,\alpha = 0{,}8 \rightarrow 0{,}8^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}36 \rightarrow \cos\alpha = \pm 0{,}6$.

El valor de $\text{tag}\,\alpha = \dfrac{0{,}8}{\pm 0{,}6} = \pm 1{,}33...$

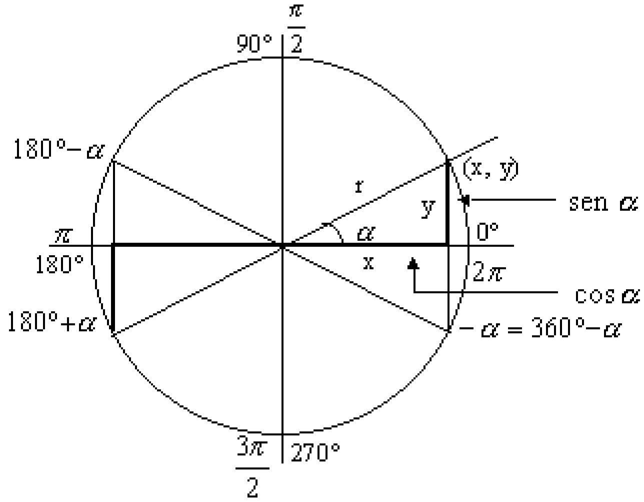
- Si $\text{tag}\,\alpha = 2 \Rightarrow 1 + 2^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{5}}$

Como sen α = cos α · tag α → $\text{sen}\alpha = \frac{2}{\pm\sqrt{5}}$

Nota: El doble signo de los resultados está relacionado con la periodicidad y con la simetría de las funciones trigonométricas.

- **Razones trigonométricas en la circunferencia**

Con ayuda de la circunferencia, observamos:



$\text{sen}\alpha = \frac{y}{r}$ → si r = 1, sen α = y; $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ → si r = 1, cos α = x

El seno de un ángulo es positivo cuando está entre 0 y 180º (primero y segundo cuadrante); es negativo cuando está en los cuadrantes tercero y cuarto. Además:

sen α = sen (180 – α) = –sen (180 + α) = – sen(360 – α)

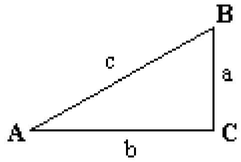
El coseno de un ángulo es positivo cuando está entre 0 y 90º o entre 270 y 360º (primero y cuarto cuadrante); es negativo cuando está en los cuadrantes segundo y tercero.. Además:

cos α = –cos (180 – α) = –cos (180 + α) = cos (360 – α)

Ejemplo:

- Para el ejemplo anterior, si sen α = 0,8 y α está en el primer cuadrante, de las dos soluciones cos α = ±0,6 nos quedamos con la positiva, cos α = +0,6; pero si α perteneciese al segundo cuadrante habría que elegir cos α = –0,6. Análogamente, los valores de tag α sería +1,33 y –1,33, respectivamente.

Resolución de triángulos rectángulos



Resolver un triángulo es determinar sus elementos desconocidos (ángulos o lados) a partir de otros conocidos.
Un triángulo rectángulo puede resolverse conociendo:

(1) dos lados; (2) uno de sus ángulos agudos y un lado.

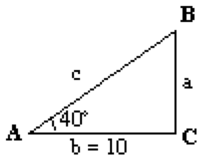
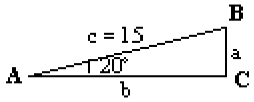
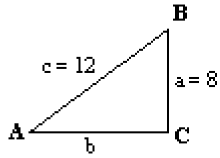
Naturalmente, al decir que el triángulo es rectángulo se saben dos cosas más:

– qué tiene un ángulo de 90º, C = 90º

– que sus lados verifican el teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$.

En los siguientes ejemplos resolvemos algunos casos.

<u>Ejemplos</u>:

❑ Sabiendo que A = 40º y b = 10 cm, hallar a, c y B.  B = 90 – A = 90 – 40 = 50º $\cos 40 = \dfrac{10}{c} \Rightarrow$ $c = \dfrac{10}{\cos 40} = \dfrac{10}{0,766} = 13,05$ $\text{tag } 40 = \dfrac{a}{10} \Rightarrow$ a = 10 tag 40 = 10 · 0,839 = 8,39 cm	❑ Sabiendo que A = 20º y c = 15 cm, hallar a, b y B.  B = 90 – A = 90 – 20 = 70º $\cos 20 = \dfrac{b}{15} \Rightarrow$ b = 15 cos 20 = 15 · 0,94 = 14,1 cm $\text{sen } 20 = \dfrac{a}{15} \Rightarrow$ a = 15 sen 20 = 15 · 0,342 = 5,13 cm	❑ Sabiendo que a = 8 cm y c = 12 cm, hallar b, A y B.  $b = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{80} = 8,94$ $\text{sen A} = \dfrac{8}{12} = 0,666... \Rightarrow$ A = arcsen 0,666 = 41,81º B = 90 – 41,81 = 48,19º