

Ecuaciones trigonométricas elementales

En la práctica, la mayoría de las ecuaciones trigonométricas son elementales; de la forma:

$$\text{sen } ax = b; \quad \text{cos } ax = b; \quad \text{tag } ax = b$$

Todas ellas pueden resolverse directamente con la calculadora, mediante las teclas \sin^{-1} , \cos^{-1} y \tan^{-1} , que aparecen sobre las teclas de $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ y $\boxed{\tan}$, y cuyo significado es:

- **Arcoseno** (\sin^{-1}): $x = \arcsen y \Leftrightarrow \text{sen } x = y$
- **Arcocoseno** (\cos^{-1}): $x = \arccos y \Leftrightarrow \text{cos } x = y$
- **Arcotangente** (\tan^{-1}): $x = \text{arctag } y \Leftrightarrow \text{tag } x = y$

Por tanto:

- $\text{sen } ax = b \Rightarrow ax = \arcsen b \Rightarrow x = \frac{\arcsen b}{a}$
- $\text{cos } ax = b \Rightarrow ax = \arccos b \Rightarrow x = \frac{\arccos b}{a}$
- $\text{tag } ax = b \Rightarrow ax = \text{arctag } b \Rightarrow x = \frac{\text{arctag } b}{a}$

Observación: Utilización de la calculadora

□ Con la calculadora en el modo DEG:

$$\arcsen 0,5 = 30^\circ, \text{ pues } \text{sen } 30^\circ = 0,5; \arcsen(-0,5) = -30^\circ = 330^\circ; \arcsen(-1) = -90^\circ.$$

(En el caso de arcsen las calculadoras suelen dar el resultado más cercano a 0° , en el intervalo $[-90^\circ, 90^\circ]$; en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ si es en radianes)

La solución correcta sería:

$$\arcsen 0,5 = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}, \text{ pues: } \text{sen}(30^\circ + k \cdot 360^\circ) = \text{sen}(150^\circ + k \cdot 360^\circ) = 0,5.$$

Análogamente:

$$\arcsen(-0,5) = \begin{cases} 210^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 330^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}; \quad \arcsen(-1) = -90^\circ + k \cdot 360^\circ = 270^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

□ Con la calculadora en el modo RAD:

$$\arccos 0,5 = 1,047... = \frac{\pi}{3}; \arccos 0 = 1,57... = \frac{\pi}{2}; \arccos(-1) = 3,14... = \pi$$

(Para el arccos, las calculadoras suelen dar el resultado entre 0 y π ; intervalo $[0, 180^\circ]$ si se da en grados.).

La solución correcta sería:

$$\arccos 0,5 = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}; \arccos 0 = \frac{\pi}{2} + k\pi; \arccos(-1) = \pi + 2k\pi.$$

□ Con la calculadora en el modo RAD:

$$\text{arctag } 1 = 0,785... = \frac{\pi}{4}; \text{arctag }(-0,8) = -0,6747; \text{arctag } \sqrt{3} = 1,047... = \frac{\pi}{3}$$

Las calculadoras suelen dar el resultado en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; en grados, intervalo $[-90^\circ, 90^\circ]$

La solución correcta sería:

$$\operatorname{arctag} 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi; \operatorname{arctag} (-0,8) = -0,6747 + k\pi; \operatorname{arctag} \sqrt{3} = 1,047\dots = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Ejemplos de ecuaciones $\operatorname{sen} ax = b$:

□ Con la calculadora en el modo DEG:

$$\operatorname{sen} x = 0,5 \Rightarrow x = \operatorname{arcsen} 0,5 \rightarrow x = 30^\circ \text{ o } x = 150^\circ \text{ (más vueltas: } +k \cdot 360^\circ)$$

$$\operatorname{sen} x = -0,5 \Rightarrow x = \operatorname{arcsen}(-0,5) \rightarrow x = -30^\circ = 330^\circ; x = 210^\circ$$

$$\operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = \operatorname{arcsen}(-1) = -90^\circ = 270^\circ.$$

$$\operatorname{sen} 2x = 1 \Rightarrow 2x = \operatorname{arcsen} 1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \rightarrow x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ.$$

OJO: Un ERROR frecuente es: $\operatorname{sen} 2x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \dots$ MUY MAL

En cambio, ESTÁ BIEN lo siguiente: $2\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \dots$

Ejemplos de ecuaciones $\operatorname{cos} ax = b$:

□ Con la calculadora en el modo RAD:

$$\operatorname{cos} x = 0,5 \Rightarrow x = \operatorname{arccos} 0,5 \rightarrow x = 1,047\dots = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{cos} x = 0 \Rightarrow x = \operatorname{arccos} 0 \rightarrow x = 1,57\dots = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{cos} 3x = -1 \Rightarrow 3x = \operatorname{arccos}(-1) \rightarrow 3x = \pi + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

OJO: Un ERROR frecuente es: $\operatorname{cos} 3x = 1 \Rightarrow \operatorname{cos} x = \frac{1}{3} \rightarrow \dots$ MUY MAL

Ejemplos de ecuaciones $\operatorname{tag} ax = b$:

□ Con la calculadora en el modo RAD:

$$\operatorname{tag} x = 1 \Rightarrow x = \operatorname{arctag} 1 \rightarrow x = 0,785\dots = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\operatorname{tag} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \operatorname{arctag} \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\operatorname{tag} 2x = 4 \Rightarrow 2x = \operatorname{arctag} 4 \rightarrow 2x = 1,3258 + k\pi \rightarrow x = 0,6629 + k\pi/2.$$

OJO: Un ERROR frecuente es: $\operatorname{tag} 2x = 4 \Rightarrow \operatorname{tag} x = 2 \rightarrow \dots$ MUY MAL