SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Definición

Una sucesión es un conjunto de números dispuestos ordenadamente. A cada uno de los números se le llama término. Suelen designarse por a_1, a_2, a_3, ..., a_n.
Una sucesión puede definirse también como una función (una aplicación) de **N*** = {1, 2, 3, …} en el conjunto **R** de los números reales. Así:

$$a: \mathbf{N^*} \to \mathbf{R},$$

de manera que: $1 \to a(1) = a_1$; $2 \to a(2) = a_2$; ... $n \to a(n) = a_n$

La variable n indica la posición. Así, por ejemplo, el término séptimo se indicaría por a_7.

Ejemplos:

- 2, 5, 8, 11, ... Aquí: $a_1 = 2$, ..., $a_4 = 11$.
- 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... es la sucesión de los números primos.
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... es la sucesión de Fibonacci

Término general de una sucesión

Es una fórmula que nos permite obtener el valor de cualquier término en función de la posición que ocupa. No siempre se puede obtener la expresión del término general.

Ejemplos:

- La expresión $a_n = 3n - 1$ es el término general de la sucesión 2, 5, 8, 11, ... A partir de esa fórmula podemos obtener, por ejemplo, $a_{25} = 3 \cdot 25 - 1 = 74$.
- Si se conoce que el término general de una sucesión es, por ejemplo, $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, se puede conocer cualquiera de sus términos con solo sustituir. Así: $a_1 = \dfrac{2}{1}$, $a_2 = \dfrac{3}{4}$, ..., $a_{10} = \dfrac{11}{100}$.

Operaciones con sucesiones

Las operaciones con sucesiones (suma, resta, multiplicación, división, radicación, …) se realizan de manera análoga a las operaciones con expresiones algebraicas en la indeterminada n; y verifican todas sus propiedades.

Ejemplos:

- Si $a_n = n^2 - 3n$, $b_n = \dfrac{1}{2n}$ y $c_n = 2n - 1$, entonces:

$$a_n + b_n = n^2 - 3n + \frac{1}{2n} = \frac{2n^3 - 6n + 1}{n}; \qquad a_n - c_n = n^2 - 3n - (2n-1) = n^2 - 5n + 1$$

Ejercicios

1. Determina la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) 2, 4, 6, 8, 10, … b) 1, 3, 5, 7, 9, … c) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{8}, \dots$

Halla para cada una de ellas los términos décimo, cuadragésimo y septuagésimo.

Sol: a) $a_n = 2n \to 20; 80; 140$. b) $b_n = 2n - 1 \to 19; 79; 139$. c) $c_n = \dfrac{2n-1}{2n} \to \dfrac{19}{20}; \dfrac{79}{80}; \dfrac{139}{140}$

Ejercicio

2. Determina la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) 1, 4, 9, 16, 25, … b) 5, 10, 15, 20, 25, … c) $\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \ldots$

Halla el valor de los términos a_{12}, b_{100} y c_{30}.

Sol. a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = 5^{n-1}$

Algunos tipos de sucesiones

- Sucesión **creciente**. Una sucesión es creciente si cada término es mayor o igual que el anterior: $a_n \le a_{n+1}$. Esto es, cuando $a_{n+1} - a_n \ge 0$.

Si $a_n < a_{n+1}$ la sucesión se llama *estrictamente creciente*. Por ejemplo, la sucesión 1; 1,1; 1,2; 1,3; … es (estrictamente) creciente.

- Sucesión **decreciente**. Una sucesión es decreciente si cada término es menor que el anterior: $a_n \ge a_{n+1}$. Esto es, cuando $a_{n+1} - a_n \le 0$.

Si $a_n > a_{n+1}$ la sucesión se llama *estrictamente decreciente*. Por ejemplo, la sucesión 1; 1/2; 1/3; 1/4, … es estrictamente decreciente

- Sucesión **constante**. Es aquella que tiene todos sus términos iguales: $a_n =$ k, para todo n.

- Sucesión **acotada**. Una sucesión está acotada superiormente si existe una constante k, tal que $a_n \le$ k, para todo n.

Una sucesión está acotada inferiormente si existe una constante k, tal que k $\le a_n$, para todo n.
NOTAS: La cota superior más interesante es la más pequeña de todas; se llama **supremo**.
La cota inferior más interesante es la más grande de todas; se llama **ínfimo**.

Ejercicio resuelto

---

3. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ es creciente y está acotada superiormente por k = 2.

Solución:
Creciente. Hay que ver que $a_{n+1} - a_n \ge 0$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+2} - \frac{2n-1}{n+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{n+3} - \frac{2n-1}{n+2} = \frac{(2n+1)(n+2)-(2n-1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{5}{(n+3)(n+2)}$$

expresión que siempre toma valores positivos.
Acotada por k = 2. Hay que ver que $a_n \le 2$, para cualquier valor de n.

Esto es que $\frac{2n-1}{n+2} \le 2$, para todo n.

Si $\frac{2n-1}{n+2} \le 2 \Rightarrow$ 2n – 1 ≤ 2(n + 2) ⇒ 2n – 1 ≤ 2n + 4 ⇔ –1 ≤ 4, que efectivamente es cierto.

Ejercicio

4. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ es decreciente.

Comprueba que está acotada inferiormente por k = 1.

Ejercicio

1. Determina la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) 2, 4, 6, 8, 10, … b) 1, 3, 5, 7, 9, … c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$

Halla para cada una de ellas los términos décimo, cuadragésimo y septuagésimo.

Solución:

a) Es la sucesión de los números pares. Su término general es $a_n = 2n$.

Los términos pedidos valen: $a_{10} = 2\cdot 10 = 20$; $a_{40} = 80$; $a_{70} = 140$.

b) Es la sucesión de los números impares. Su término general es $b_n = 2n - 1$.

Los términos pedidos valen: $b_{10} = 2\cdot 10 - 1 = 19$; $b_{40} = 80 - 1 = 79$; $b_{70} = 139$.

c) Es fácil ver que $c_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{2n-1}{2n}$

Los términos pedidos valen: $c_{10} = \frac{19}{20}$; $c_{40} = \frac{79}{80}$ $c_{79} = \frac{139}{140}$

Resuelve tú

1. Determina la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) 1, 4, 9, 16, 25, … b) 5, 10, 15, 20, 25, … c) $\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \ldots$

Halla el valor de los términos $a_{12,}$ b_{100} y c_{30}.

[sol] a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = 5^{n-1}$
