Introducción al concepto de límite de una sucesión

- La sucesión 1, 3, 5, 7, … toma cada vez valores más grandes, y supera cualquier número arbitrariamente grande; esto es, no tiene cota superior. Esta sucesión no tiene límite finito; se podría decir que es ilimitada, o que su límite es infinito (+ ∞).
- La sucesión 3, –3, 3, –3, … va *saltando* indefinidamente de 3 a –3. Tampoco tiene límite. Es una sucesión oscilante.
- La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$toma cada vez valores más grandes, pero está acotada por el número 1. Su término general es $\frac{2n-1}{2n}$, cuyo valor es claramente menor que 1, pues 2n – 1 < 2n.).

Esta sucesión está limitada por el número 1; decimos que tiende a 1 o que su límite es 1.
Lo podemos ver dando valores cada vez mayores a n:

n	1	5	10	50	100	…	1000	$n \to \infty$
$a_n = \frac{2n-1}{2n}$	0,5	0,9	0,95	0,99	0,995	…	0,9995	$a_n \to 1$

Observa que la diferencia del valor de la sucesión con 1 es cada vez más pequeña. Para n = 100, la diferencia es $1 - a_{100} = 1 - 0{,}995 = 0{,}005$; para n = 1000, la diferencia es $1 - a_{1000} = 1 - 0{,}9995 = 0{,}0005$.
Para decir que el límite de esa sucesión vale 1 se indica de cualquiera de las formas siguientes:

$$\underset{n\to\infty}{lím} \frac{2n-1}{2n} = 1; \qquad lím \frac{2n-1}{2n} = 1;$$

$$\frac{2n-1}{2n} \to 1$$

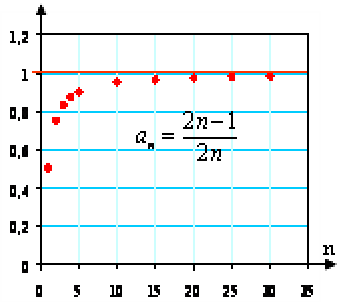

Fig. 12.1. a_n se acerca cada vez más a 1

- En general decimos que la sucesión a_n tiende a *a*, o que $lím(a_n) = a$, si para valores grandes de n la diferencia $|a_n - a|$ es tan pequeña como se desee.

A las sucesiones que tienen límite se las llama **convergentes**.

Con más precisión podemos decir: $lím(a_n) = a$ equivale a decir que para cualquier número real positivo, ε, existe un número natural k, tal que si n > k, entonces $|a_n - a| < \varepsilon$.
O bien:

$$\boxed{lím(a_n) = a \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, k, \mid \forall\, n > k \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.}$$

Propiedad. Toda sucesión creciente y acotada superiormente tiene límite. El límite coincide con la cota superior mínima.
Análogamente, toda sucesión decreciente y acotada inferiormente tiene límite. El límite coincide con la cota inferior máxima (la mayor de las cotas inferiores).

<u>Ejemplo</u>:

- La sucesión $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ es creciente y acotada. Por tanto, tiene límite y vale 2. (¿Sabrías comprobar ese resultado? Da valores grandes a n y observa que el valor de a_n se acerca cada vez más a 2.)

EJERCICIO DE APLICACIÓN

3. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{3n+5}{n+1}$:

a) Demuestra que es decreciente y acotada inferiormente por k = 3.

b) ¿A partir de qué término se cumple que $a_n < 3{,}01$?

c) Demuestra, utilizando la definición, que su límite vale 3.

Solución:

a) Veamos que $a_{n+1} - a_n \leq 0$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{3n+5}{n+1} =$$

$$= \frac{3n+8}{n+2} - \frac{3n+5}{n+1} = \frac{(3n+8)(n+1)-(3n+5)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-2}{(n+2)(n+1)}$$

expresión que siempre toma valores negativos.

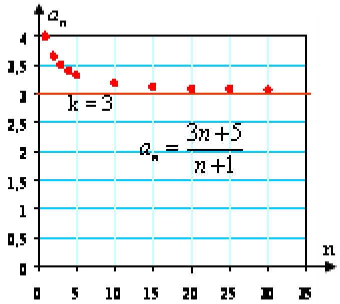

Fig. 12.2. a_n es decreciente y acotada

Vemos que esta acotada inferiormente por k = 3: $a_n \geq 3$, para cualquier valor de n.

En efecto, $a_n = \dfrac{3n+5}{n+1} \geq 3$ para todo n, pues:

3n + 5 ≥ 3(n +1), ya que 3n +5 ≥ 3n + 3

b) $a_n < 3{,}01 \Leftrightarrow \dfrac{3n+5}{n+1} < 3{,}01 \Rightarrow$ 3n + 5 < 3,01n + 3,01 $\Rightarrow$ 1,99 < 0,01n $\Rightarrow$ n > 199.

A partir del término a_{199} todos los siguientes valen menos de 3,01. Por tanto, entre 3 y 3,01 hay infinitos términos: Como, además, la sucesión es decreciente, cada vez su valor se acercará más a 3.

c) Veamos que $lím \dfrac{3n+5}{n+1} = 3$.

Para demostrarlo hay que comprobar que para cualquier ε > 0, podemos encontrar un valor de n de manera que para todos los mayores que él se cumpla que $\left|\dfrac{3n+5}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$.

En efecto, $\left|\dfrac{3n+5}{n+1} - 3\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{3n+5-3n-3}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow$

2 < ε(n + 1) $\Rightarrow$ 2 < εn + ε $\Rightarrow$ $n > \dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Esto es, para cualquier ε, basta con tomar $n > \dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$ para estar seguros de que $\left|\dfrac{3n+5}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$. Por ejemplo, si ε = 0,01, habrá que tomar $n > \dfrac{2-0{,}01}{0{,}01} = 199$; y para ε = 0,005 habrá que tomar $n > \dfrac{2-0{,}005}{0{,}005} = 399$

Resuelve tu

3. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{n-3}{4n+1}$:

a) Demuestra que es creciente y acotada superiormente por k = 1/4.

b) ¿A partir de qué término se cumple que $a_n > 0{,}249$?

c) Di cuál es su límite (no hace falta que lo demuestres).

[sol] b) a_{813} c) 0,25

Límite de algunas sucesiones

Para las sucesiones del tipo:

$$(1)\ a_n = 3n-4;\ (2)\ a_n = \frac{3}{n+2};\ (3)\ a_n = \frac{2n-1}{n^2-5};\ (4)\ a_n = \frac{n+3}{n+1};\ (5)\ a_n = \frac{n^2-1}{2n+3}$$

para determinar su límite basta con estudiar su tendencia. Así:

(1) $a_n = 3n-4$ toma cada vez valores más grandes y positivos: $lím(3n-4) = +\infty$

(2) $a_n = \frac{3}{n+2}$ toma cada vez valores más próximos a cero: $lím\frac{3}{n+2} = 0$. Estas sucesiones reciben el nombre de **sucesiones nulas**.

(3) $a_n = \frac{2n-1}{n^2-5}$ también toma cada vez valores más próximos a 0; es otra sucesión nula: $lím\frac{2n-1}{n^2-5} = 0$.

(4) $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ toma cada vez valores más próximos a 1: $lím\frac{n+3}{n+1} = 1$.

(5) $a_n = \frac{n^2-1}{2n+3}$ toma cada vez valores más grandes y positivos: $lím\frac{n^2-1}{2n+3} = +\infty$

En general:

- Las sucesiones de tipo polinómico ($a_n = P(n)$) tienden a ±∞:

Ejemplo: $lím(-n^2+17n+1) = -\infty$

- Son nulas las sucesiones del tipo $a_n = k/P(n)$, siendo k un número.

Ejemplo: $lím\frac{1}{n^2-2n-1} = 0$.

- Sucesiones del tipo $a_n = P(n)/Q(n)$:

$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \to 0$, si el grado de Q(n) es mayor que el de P(n).

Ejemplo: $lím\frac{3n+10}{n^2+1} = 0$

$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \to \infty$, si el grado de Q(n) es menor que el de P(n).

Ejemplo: $lím\frac{n^2-3n}{10n+25} = \infty$.

$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \to \frac{p}{q}$, si P(n) y Q(n) son del mismo grado, siendo p y q los coeficientes principales de P(n) y Q(n), respectivamente.

Ejemplo: $lím\frac{3n^2+7n-17}{2n^2-16n+39} = \frac{3}{2}$

- La justificación de estos resultados puede hacerse transformando la sucesión dada en otra equivalente cuyo límite sea más fácil. Una transformación adecuada consiste en dividir todos los términos de la sucesión inicial por n elevada al mayor grado presente en la sucesión. En los tres ejemplos anteriores, dividendo por n^2 queda:

$$lím\frac{3n+10}{n^2+1}=lím\frac{\frac{3n}{n^2}+\frac{10}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=lím\frac{\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\left(\frac{0+0}{1+0}\right)=0:$$

$$lím\frac{n^2-3n}{10n+25}=lím\frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}}{\frac{10n}{n^2}+\frac{25}{n^2}}=lím\frac{1-\frac{3}{n}}{\frac{10}{n}+\frac{25}{n^2}}=\left(\frac{1+0}{0+0}\right)=+\infty$$

$$lím\frac{3n^2+7n-17}{2n^2-16n+39}=lím\frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{7n}{n^2}-\frac{17}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{16n}{n^2}+\frac{39}{n^2}}=lím\frac{3+\frac{7}{n}-\frac{17}{n^2}}{2-\frac{16}{n}+\frac{39}{n^2}}=\left(\frac{3+0-0}{2-0+0}\right)=\frac{3}{2}$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN

---

4. Indica el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n=\frac{2n^2-3n+1}{5n-2}$ b) $a_n=\frac{3n^2+1}{n^3+2n}$ c) $a_n=\frac{5n^2-5}{4n^2-n}$

Justifica el resultado del límite b)

Solución:

a) $lím\frac{2n^2-3n+1}{5n-2}=\infty$. El grado del numerador es mayor que el del denominador.

b) $lím\frac{3n^2+1}{n^3+2n}=0$. El grado del numerador es menor que el del denominador.

Dividiendo todos los términos por n^3, queda:

$$lím\frac{3n^2+1}{n^3+2n}=lím\frac{\frac{3n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{2n}{n^3}}=lím\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}}=\left(\frac{0+0}{1+0}\right)=0$$

c) $lím\frac{5n^2-5}{4n^2-n}=\frac{5}{4}$. Numerador y denominador tienen el mismo grado.

Resuelve tú

4. Indica el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n=\frac{2n+1}{n+7}$ b) $a_n=\frac{3n^2+1}{5n+10}$ c) $a_n=\frac{n+4}{n^2-n+3}$

[sol] a) 2; b) ∞; c) 0
