Polinomios: operaciones con polinomios

Un polinomio de grado n, en una variable x, es una expresión algebraica de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \,, \; (a_n \neq 0)$$

donde $a_n,\ a_{n-1},\ ...,\ a_1,\ a_0$ son números llamados **coeficientes**. Todos lo exponentes deben ser enteros positivos y el mayor de ellos, n en este caso, indica el grado del polinomio.

A cada uno de los sumandos se les llama **términos**. El término de grado 2 es $a_2 x^2$. El **término principal** es $a_n x^n$, el de mayor grado. El número a_0 se llama **término independiente**.

Dos **términos** son **semejantes** cuando sólo difieren en los coeficientes: $a_n x^n$ y $b_n x^n$ son semejantes. En particular, $5x^3$ y $-17x^3$ son semejantes; por el contrario, $10x^2$ y 10x no lo son.

- **Suma y resta de polinomios**

Para sumar polinomios se agrupan, sumando o restando, los términos semejantes.

Ejemplo:

- $(4x^3 + 5x - 6) - (3x^3 - 2x^2 + 7x) + (6x^3 + 4x^2 - x + 5) = 7x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

OJO: $2x^5 - 4x^3$ no puede realizarse; debe dejarse así. Lo más que puede hacerse es sacar factor común: $2x^5 - 4x^3 = 2x^3(x^2 - 2)$

- **Multiplicación de polinomios**

Se utiliza la propiedad distributiva del producto y las propiedades de la potenciación.

Ejemplos:

- $3\cdot(4x^2 + 5x - 6) = 12x^2 + 15x - 18$
- $(2x^2 + 5x - 6)\cdot(3x^2 - 2x + 3) = 6x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 15x^3 - 10x^2 + 15x - 18x^2 + 12x - 18$
  $= 6x^4 + 11x^3 - 22x^2 + 27x - 18$
- $\left(\frac{2}{3}x^2 - 3x\right)\cdot\left(-2x^2 + \frac{3}{4}\right) = -\frac{4}{5}x^4 + \frac{6}{12}x^2 + 6x^3 - \frac{9}{4}x = -\frac{4}{5}x^4 + 6x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$

Ejercicio

Halla los productos:

a) $(-2x^2 + 2x - 5)\cdot(4x^2 - 3x)$; b) $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)\cdot\left(4x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right)$

- **Productos notables:**

Son las operaciones que aparecen con relativa frecuencia. Conocerlas de memoria agiliza los cálculos. Indicamos los tres casos más frecuentes.

Caso:	Ejemplo:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	❑ $(2 + 3x^2)^2 = 4 + 12x^2 + 9x^4$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	❑ $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	❑ $(\sqrt{x-2} + 3)(\sqrt{x-2} - 3) = (\sqrt{x-2})^2 - 3^2 = x - 2 - 9 = x - 11$

Ejercicio

Halla:

a) $(-2x^2 - 3)^2$; b) $(3x - 2)^2$; c) $\left(\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x}\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

- **División de monomios**

Se basa en las operaciones con potencias.

Ejemplos:

- $\dfrac{12x^3}{2x} = 6x^2$;
- $\dfrac{2x^2}{5x^3} = \dfrac{2}{5x}$;
- $\dfrac{3x^3}{-2x} = -\dfrac{3}{2}x^2$

- **División de polinomios**

Para dividir polinomios hay que ordenarlos. Recordamos el algoritmo con el siguiente ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & & -22x^2 & +27x & -18 & 2x^2+x \\
\cline{6-6}
-8x^4 & -4x^3 & & & & 4x^2-2x-10 \\
\cline{1-3}
 & -4x^3 & -22x^2 & & & \\
 & +4x^3 & +2x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & -20x^2 & +27x & & \\
 & & +20x^2 & +10x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 37x & -18 &
\end{array}
$$

Ejercicio

Practica el algoritmo anterior dividiendo $(2x^3 - 3x + 2) : (2x - 1)$

- **Teoremas del resto y del factor**

Teorema el resto. El valor numérico del polinomio P(x) para $x = a$ es igual al resto de la división P(x) : $(x - a)$.

Ejemplos:

- Para $P(x) = 2x^3 - 3x$ y para x = 2, se tiene que P(2) = 10. Observa que coincide con el resto de la división $(2x^3 - 3x) : (x - 2)$, hecha anteriormente.
- Para $P(x) = x^3 - 2x - 1$ y para x = –1, se tiene que P(–1) = 0. También coincide con el resto de la división $(x^3 - 2x - 1) : (x + 1)$, hecha antes. En este caso, x = –1 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor. $(x - a)$ es un factor del polinomio P(x) $\Leftrightarrow$ $x = a$ es una raíz de P(x).

Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación P(x) = 0.
Si conocemos que x_1, x_2 y x_3 son las raíces de P(x), entonces el polinomio es de la forma

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \quad c \text{ es una constante.}$$

Ejemplos:

- Un polinomio de tercer grado cuyas raíces son x = –1, x = 2 y x = 3 es,

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

(También puede ser $P(x) = -5(x + 1)(x - 2)(x - 3)$. Hay infinitos.)

- Las raíces de $P(x) = x^3 - 4x$ son x = –2, x = 0 y x = 2 (compruébalo); entonces:

$$P(x) = x(x - 2)(x + 2)$$

Resumiendo: $x = a$ es una raíz de P(x) $\Leftrightarrow$ P(a) = 0 $\Leftrightarrow$ $(x - a)$ es un factor de P(x) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ P(x) = $(x - a)$ · Q(x), siendo Q(x) de un grado menor que P(x).

- **Regla de Ruffini: división de P(x) entre (x – *a*)**

Sólo puede utilizarse para dividir un polinomio cualquiera entre el binomio $x - a$.
Para aplicar la regla, los coeficientes del dividendo se colocan ordenados (de mayor a menor grado, incluido el término independiente); si faltase alguno de ellos, se pone un 0.

Ejemplos:

- Para dividir $(2x^3 - 3x):(x-2)$ se procede así:

Coeficientes del dividendo		2	0	−3	0	
Valor de a en $x - a$	2		4	8	10	
Coeficientes del cociente		2	4	5	10	← Resto

El cociente de la división es $c(x) = 2x^2 + 4x + 5$; el resto, r = 10.

- Análogamente, para hacer $(x^3 - 2x - 1):(x+1)$ se disponen los números así:

	1	0	−2	−1
−1		−1	1	1
	1	−1	−1	0

El cociente de la división es $c(x) = x^2 - x - 1$; el resto, r = 0. En este caso, el dividendo es múltiplo del divisor. Esto es:

$$(x^3 - 2x - 1) = (x+1)(x^2 - x - 1)$$

También se dice que (x + 1) es un **factor** de $(x^3 - 2x - 1)$.

- **Factorización de polinomios**

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de factores irreducibles, los de menor grado posible, como en el ejemplo inmediatamente anterior. (El concepto es análogo al de la descomposición de un número en factores primos. Ejemplo: 462 = 2 · 3 · 7 · 11.)

El teorema del factor nos permite escribir un polinomio como producto de factores de menor grado. Para ello: 1º: Hay que buscar las raíces (utilizando los métodos de resolución de ecuaciones; o *a ojo* si el polinomio es de grado mayor o igual a 3. En este caso, si hay raíces enteras son divisores del término independiente). 2º. Cuando se conozca alguna raíz, conviene dividir por Ruffini para obtener factores de menor grado, y, por tanto, más cómodos de manejar.

Conviene saber que un polinomio tiene tantas raíces como indica su grado (esas raíces pueden ser simples, múltiples (repetidas) o complejas; en este último caso no se hallan).
En consecuencia, un polinomio de grado n tiene un máximo de n factores irreducibles.

Ejemplos:

- Si $P(x) = x^3 - 4x$, se puede sacar factor común x (x = 0 es una raíz). En consecuencia,

$$P(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$$

Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$ x = –2; x = 2.
Por tanto, $P(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$

- Para $P(x) = x^3 + 4x$, también se tiene que $P(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$. Pero, como en este caso, la ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene soluciones reales, no es posible hacer una descomponiendo más simple.
- Si $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$, una raíz es x = 1 pues $P(1) = 0 \Rightarrow$ (x – 1) es un factor $\Rightarrow P(x)$ es divisible por (x – 1). Se divide por Ruffini y se obtiene:

$$P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = (x-1)(2x^2 - 8x + 6) = 2(x-1)(x^2 - 4x + 3)$$

Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$. Sus soluciones son $x = 1$ y $x = 3$ $\Rightarrow$ $(x-1)$ y $(x - 3)$ son los factores.

En consecuencia: $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 2(x-1)(x-1)(x-3) = 2(x-1)^2(x-3)$.

En este caso, la solución $x = 1$ es doble, pues el factor $(x - 1)$ se repite dos veces.

Ejercicio

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x) = -5x^2 - x$ b) $P(x) = 4x^4 + 10x^2$

c) $P(x) = 10x^3 - 250x$ d) $P(x) = 8x^4 + 80x^3 + 200x^2$

[sol] a) $-x(5x + 1)$; b) $2x^2(2x^2 + 5)$; c) $10x(x + 5)(x - 5)$; d) $8x^2(x + 5)^2$