Ecuaciones

1. Ecuaciones de primer grado

Son de la forma $ax+b=0$, donde la incógnita x está elevada al exponente 1; a debe ser un número distinto de cero.

Para resolverla basta con despejar la x. Así: $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$

(Con frecuencia, la ecuación aparecerá con más términos pero por transposición siempre se puede llegar a la forma anterior más simple). Si aparecen denominadores y paréntesis, primero se resuelven los paréntesis, a continuación se quitan denominadores; …

<u>EJEMPLOS</u>

Observa cómo resolvemos las siguientes ecuaciones:

- $3x + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$.
- $2x-\frac{5}{6}+3x-2=\frac{x+1}{3}$
  1. Quitamos denominadores: $6\cdot\left(2x-\frac{5}{6}+3x-2\right)=6\cdot\frac{x+1}{3}$
  2. Operamos: $12x - 5 + 18x - 12 = 2x + 2$
  3. Agrupamos términos: $28x = 19$
  4. Despejamos x: $x=\frac{19}{28}$

2. Ecuaciones de segundo grado

Son de la forma $ax^2+bx+c=0$.

Su solución viene dada por la fórmula: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

<u>Ejemplos</u>:

- La ecuación $2x^2+4x-6=0$ tiene dos soluciones: $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$. (Compruébalo). Entonces, $2x^2+4x-6=2(x+3)(x-1)$.
- La ecuación $x^2+4x+4=0$ sólo tiene una solución doble, $x = -2$. Luego, $x^2+4x+4=(x+2)^2$.
- La ecuación $-x^2+4x-6=0$ no tiene soluciones reales.

Para resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado no es necesario aplicar la fórmula dada.

- $x^2+4x=0 \Rightarrow x(x + 4) = 0$. Sus soluciones son: $x = 0$, $x = -4$.
- $x^2-9=0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$. Sus soluciones son: $x = 3$, $x = -3$.
- $x^2+4=0$ no tiene soluciones reales.
- $\frac{-3000}{x^2}+1920=0 \Leftrightarrow -3000+1920x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{3000}{1920} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{3000}{1920}}=\pm 1,25$

3. Ecuaciones de tercer grado

Son ecuaciones de la forma $ax^3+bx^2+cx+d=0$, a, b, c, d son números reales; $a \neq 0$.

Para resolver ecuaciones de tercero o grado superior no hay fórmulas elementales; sólo podemos aplicar una propiedad que da resultado cuando hay alguna solución entera, pues si existe, será un número divisor del término independiente, *d*. Las demás soluciones pueden hallarse descomponiendo en factores la ecuación inicial.

Observación:

Si una ecuación, cualquiera que sea su grado, viene dada como producto de factores = 0, las soluciones son las de cada uno de los factores, igualados a cero.

Ejemplos:

- Las soluciones de la ecuación $(x-1)(4x^2-1)(x^3+8)=0$ son las de:

$$\begin{cases} x-1=0 & \Rightarrow \quad x=1 \\ 4x^2-1=0 & \Rightarrow \quad x=\pm 1/2 \\ x^3+8=0 & \Rightarrow \quad x=\sqrt[3]{-8}=-2 \end{cases}$$

- Si la ecuación $x^3-2x^2+4x-8=0$ tuviese alguna solución entera será alguno de los divisores de 8, que son: ±1, ±2, ±4 o ±8.

Probando se ve que vale x = 2 es una solución, pues $2^3-2\cdot 2^2+4\cdot 2-8=0$.

Dividiendo por x − 2, se tiene: $x^3-2x^2+4x-8=(x-2)(x^2+4)=0$.

Como el segundo factor (x^2 + 4) es irreducible, no hay más soluciones reales. En consecuencia, la ecuación dada sólo tiene una solución real, x = 2.

- Este proceso es inmediato si falta el término independiente, como en el caso $4x^3+4x^2-3x=0$, pues basta con sacar factor común:

$$4x^3+4x^2-3x=x(4x^2+4x-3)=0.$$

Una solución es x = 0; las otras dos posibles, las soluciones de la ecuación $4x^2+4x-3=0$; que son $x=-\frac{3}{2}$ y $x=\frac{1}{2}$.

- La ecuación $x^3+x^2+1=0$ no tiene ninguna solución entera (inténtalo). Por tanto, en este caso no es posible dar la solución.

4. Ecuaciones bicuadradas

Las ecuaciones de cuarto grado de la forma $ax^4+bx^2+c=0$, se llaman bicuadradas. Se resuelven empleando la fórmula de la ecuación de segundo grado, pues haciendo $x^2=t$, queda:

$$ax^4+bx^2+c=0 \iff at^2+bt+c=0$$

Ejemplos:

- La ecuación $x^4-3x^2+2=0 \iff t^2-3t+2=0 \Rightarrow t=1, t=2 \Rightarrow x=\pm 1$ y $x=\pm\sqrt{2}$
- Si es una bicuadrada reducida es todavía más fácil. Por ejemplo:

$$x^4-3x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-3)=0 \Rightarrow x^2=0;\ x^2-3=0 \Rightarrow x=0 \text{ y } x=\pm\sqrt{3}$$

5. Ecuaciones con expresiones radicales

En las ecuaciones con radicales hay que aislar la raíz cuadrada; después se elevarán al cuadrado los dos miembros de la ecuación y se resolverá la ecuación resultante.

En la nueva ecuación pueden salir soluciones no válidas que habrá que desechar.

Ejemplos:

- Para resolver $x-\sqrt{x}=6$, se procede así:

$x-\sqrt{x}=6 \Rightarrow x-6=\sqrt{x} \Rightarrow (x-6)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2-12x+36=x \Rightarrow x^2-13x+36=0 \Rightarrow$ x = 9, x = 4.

De las dos soluciones sólo es válida la primera, x = 9.

OJO: Un error frecuente es el siguiente.

Está MAL: $x-\sqrt{x}=6 \Rightarrow \left(x-\sqrt{x}\right)^2=6^2 \Rightarrow x^2-x=6 \Rightarrow$ x = 3

- $\dfrac{\sqrt{4x^3+5}}{x}-2=x \Rightarrow \sqrt{4x^3+5}=x(x+2) \Rightarrow \sqrt{4x^3+5}=x^2+2x \Rightarrow$

$4x^3+5=x^4+4x^3+4x^2 \Rightarrow x^4+4x^2-5=0 \Rightarrow x^2=-5$, que no tiene sentido y $x^2=1 \Rightarrow$ x = –1 y x = 1. (La solución x = – 1 sólo es válida si consideramos el resultado negativo de la raíz)

6. Ecuaciones racionales

Son de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=k$, donde P(x) y Q(x) son expresiones algebraicas y k una constante

Se resuelven eliminando denominadores y pasando a una ecuación que responda a alguno de los tipos estudiados con anterioridad.

En estas ecuaciones se habrá de comprobar que las soluciones obtenidas son válidas, pues al quitar denominadores pueden aparecer soluciones extrañas.

<u>EJEMPLO</u>:

- Para resolver la ecuación: $\dfrac{x}{x+1}+2=\dfrac{3x+1}{x}$

Sumamos el primer miembro, resultando: $\dfrac{x+2(x+1)}{x+1}=\dfrac{3x+1}{x}$

Multiplicando en cruz se tiene

$x^2 + 2x(x + 1) = (3x + 1)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2x^2 + 2x = 3x^2 + 3x + x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 3x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow 0 = 2x + 1$

que tiene por solución x = –1/2.