

**Inecuaciones**

Una inecuación es una desigualdad en la que aparecen números y letras ligados mediante las operaciones algebraicas. Los signos de desigualdad son:  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$ ,  $\geq$

Las inecuaciones se clasifican por su grado y por su número de incógnitas.

Soluciones de una inecuación son los valores de la(s) incógnita(s) que cumplen la desigualdad. En las inecuaciones suele hablarse de conjunto de soluciones, pues las soluciones se dan mediante intervalos.

Resolver una inecuación es encontrar sus soluciones. Para resolver una inecuación hay que despejar la incógnita. Para ello hay que tener en cuenta las siguientes propiedades:

1.  $A < B \Leftrightarrow A + n < B + n$ . También:  $A - n < B - n$
  2.  $A < B \Leftrightarrow A \cdot n < B \cdot n$ , si  $n > 0$  También:  $A/n < B/n$ , si  $n \neq 0$ , si  $n > 0$
  3.  $A < B \Leftrightarrow A \cdot n > B \cdot n$ , si  $n < 0$  También:  $A/n > B/n$ , si  $n \neq 0$ , si  $n < 0$
- OJO: Si se multiplica por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad.

**Ejemplos:**

□ Observa:

$$3 < 5 \text{ (multiplicando por 6)} \Rightarrow 18 < 30$$

$$3 < 5 \text{ (multiplicando por -6)} \Rightarrow -18 > -30 \text{ (se cambia } < \text{ por } > \text{)}$$

□ Igualmente:

$$2x^2 < 8 \Rightarrow \text{dividiendo por 2, que } x^2 < 4$$

$$-x + 1 < -2x \Rightarrow \text{multiplicando por } -1: -(-x + 1) > 2x \Rightarrow 2x < x - 1$$

**1. Inecuaciones de primer grado**

Para resolverlas se utilizan las tres propiedades indicadas. Además, en todos los casos se tendrá en cuenta el orden de prioridad de las operaciones.

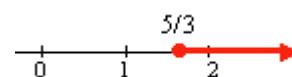
**Ejemplos:**

□ Resolver  $2(x + 1) + 3 \leq 5(x + 2) - 10$

Operamos los paréntesis y trasponemos términos:

$$2x + 2 + 3 \leq 5x + 10 - 10 \Leftrightarrow 5 \leq 5x - 2x \Leftrightarrow 5 \leq 3x \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq x$$

La solución son los puntos de  $[5/3, \infty)$



□ Resolver  $\frac{x-2}{3} < \frac{2x-4}{5}$

1°. Multiplicamos ambos miembros por 15:  $5(x - 2) < 3(2x - 4)$

2°. Operamos los paréntesis:  $5x - 10 < 6x - 12$

3°. Trasponemos términos:  $5x - 6x < -12 + 10$

4°. Agrupamos:  $-x < -2$

5°. Multiplicamos por  $-1$ :  $x > 2$

**2. Inecuaciones de segundo grado**

La expresión  $ax^2 + bx + c$  puede ser mayor, menor o igual que 0. Esto es, podemos plantearnos:

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad ax^2 + bx + c > 0$$

En los tres casos conviene resolver la ecuación de segundo grado asociada y escribir el trinomio  $ax^2 + bx + c$  como producto de factores.

Dependiendo de las raíces de esa ecuación escribiremos:

→  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) < 0$  (si hay dos soluciones distintas  $x_1$  y  $x_2$ ).

→  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 < 0$  (si sólo hay una solución,  $x_1$ )

→ si no hay soluciones reales, la inecuación no puede descomponerse en factores.

En cada caso, estudiando los signos de los factores se encuentran los intervalos solución.

Observación. En los tres casos puede no haber solución o soluciones.

Ejemplos:

□ Para resolver  $2x^2 + 4x - 6 < 0$  hallamos las soluciones de la ecuación asociada; son:  $x_1 = -3$  y  $x_2 = 1$ .

Por tanto,  $2x^2 + 4x - 6 = 2(x + 3)(x - 1)$ .

Con esto escribimos:

$$2x^2 + 4x - 6 < 0 \Leftrightarrow 2(x + 3)(x - 1) < 0.$$

Como el primer factor, 2, es positivo, el signo del producto dependerá del signo de cada uno de los otros dos factores,  $(x + 3)$  y  $(x - 1)$ .

$$(+) \cdot (-) \rightarrow (x + 3 > 0) \cdot (x - 1 < 0) \rightarrow (x > -3) \text{ y } (x < 1) \Rightarrow -3 < x < 1$$

$$(-) \cdot (+) \rightarrow (x + 3 < 0) \cdot (x - 1 > 0) \rightarrow (x < -3) \text{ y } (x > 1) \Rightarrow \text{No hay puntos comunes.}$$

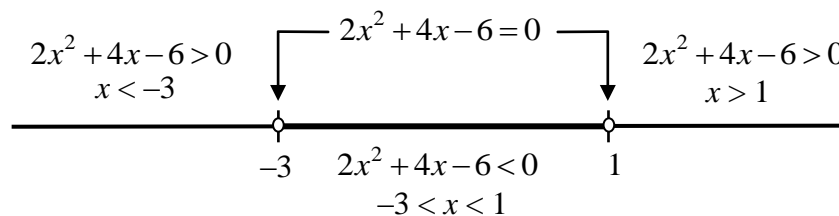
Nota: Hemos hallado los puntos para los que  $2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow x = -3$  y  $x = 1$ .

También hemos hallado los puntos para los que  $2x^2 + 4x - 6 < 0 \rightarrow -3 < x < 1$ .

En consecuencia, para todos los demás valores de  $x$  se cumplirá que  $2x^2 + 4x - 6 > 0$ . Esto es, para  $x < -3$  y para  $x > 1$ .

Por tanto, al resolver  $2x^2 + 4x - 6 < 0$  también queda resuelta la inecuación  $2x^2 + 4x - 6 > 0$

Gráficamente, la situación es la siguiente:



Observación: Puede ser oportuno recordar que la función  $y = 2x^2 + 4x - 6$ , es una parábola. Si se representa gráficamente, su curva:

· corta al eje OX en los puntos  $x = -3$  y  $x = 1$ , que son las soluciones de la ecuación

$$2x^2 + 4x - 6 = 0;$$

· y está por debajo del eje OX en el intervalo  $(-3, 1)$ , precisamente las soluciones de

$$2x^2 + 4x - 6 < 0.$$

□ Resolvamos ahora  $x^2 + 4x + 4 < 0$ .

Como la ecuación  $x^2 + 4x + 4 = 0$  sólo tiene una solución doble,  $x = -2$ , se deduce que

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2: \text{ Y como un cuadrado nunca es negativo, la inecuación planteada no tiene}$$

solución, pues  $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$ , para cualquier número real de  $x$ .

Observación: Como puede verse fácilmente, la parábola  $y = x^2 + 4x + 4$  tiene su vértice (su mínimo) en el punto  $(-2, 0)$ , de abscisa  $x = -2$ ; para los demás valores de  $x$  siempre está por encima del eje OX.

□ Por contra, la inecuación  $-x^2 + 4x - 6 < 0$  es cierta para todo valor de  $x$ , pues  $-x^2 + 4x - 6 = 0$  no tiene soluciones reales. Por tanto, sólo hay dos posibilidades: o siempre es mayor que cero; o siempre es menor que cero. Como para  $x = 0$  vale  $-6$ , siempre será negativa; esto es,  $-x^2 + 4x - 6 < 0$  es cierta para todo valor de  $x$ .

Observación: Para este caso, también puede verse que la gráfica de la parábola  $y = -x^2 + 4x - 6$  siempre queda por debajo del eje OX.

### Menor que 0 y mayor que 0 en productos y cocientes

Muchas veces interesa conocer sólo el signo de una expresión algebraica. Esto es, saber cuándo es menor que cero (negativa) y cuándo es mayor que cero (positiva). El mejor procedimiento, salvo en casos inmediatos, es descomponer dicha en factores y, después, tener en cuenta las reglas de los signos:

$$\begin{array}{ll} (+) \cdot (-) = (-) < 0 & (+) \cdot (+) = (+) > 0 \\ (-) \cdot (+) = (-) < 0 & (-) \cdot (-) = (+) > 0 \\ (+) : (-) = (-) < 0 & (+) : (+) = (+) > 0 \\ (-) : (+) = (-) < 0 & (-) : (-) = (+) > 0 \end{array}$$

Pueden presentarse los siguientes casos:

- Producto  $A \cdot B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \text{ y } B > 0, \text{ o} \\ A > 0 \text{ y } B < 0 \end{cases}$  (Un factor es positivo y otro negativo.)
- Producto  $A \cdot B > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \text{ y } B < 0, \text{ o} \\ A > 0 \text{ y } B > 0 \end{cases}$  (Los dos factores tienen el mismo signo)

### Ejemplos:

- La expresión  $2x > 0$  cuando  $x > 0$ . Análogamente,  $2x < 0$  si  $x < 0$ .
- $-x^2$  siempre es negativa, pues  $x^2 > 0$  para todo  $x$ .
- $x^2(x - 1)$  será positiva cuando  $x - 1 > 0$ ; esto es, cuando  $x > 1$ .

- Cociente  $\frac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \text{ y } B > 0, \text{ o} \\ A > 0 \text{ y } B < 0 \end{cases}$  (Los dos términos con distinto signo)
- Cociente  $\frac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \text{ y } B < 0, \text{ o} \\ A > 0 \text{ y } B > 0 \end{cases}$  (Los dos términos con el mismo signo)

### Ejemplos:

- El signo de las expresiones  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{x^2}$  o  $\frac{-1}{x^3}$  sólo depende del denominador. Así:

$$\frac{1}{x} < 0 \text{ si } x < 0; \quad \frac{1}{x} > 0 \text{ si } x > 0. \quad \text{Obsérvese que } \frac{1}{x} \text{ nunca vale } 0.$$

$$\frac{1}{x^2} > 0 \text{ siempre, pues el denominador siempre es positivo.}$$

$$\frac{-1}{x^3} < 0 \text{ si } x > 0 [(-) : (+) = (-)]. \quad \frac{-1}{x^3} > 0 \text{ si } x < 0 [(-) : (-) = (+)].$$

- $\frac{x-1}{x+2} > 0$  cuando  $x - 1 > 0$  y  $x + 2 > 0$ :  $[(+) : (+) = (+)] \Rightarrow x > 1$ .

También, cuando  $x - 1 < 0$  y  $x + 2 < 0$ :  $[(-) : (-) = (+)] \Rightarrow x < -2$

□ El signo de las expresiones  $\frac{x-3}{x^2}$  o de  $\frac{x^2-1}{(x+2)^2}$  sólo depende del numerador, pues el denominador siempre es positivo, salvo en  $x = 0$  y  $x = -2$ , respectivamente, en donde dichas expresiones no están definidas. Así:

$$\frac{x-3}{x^2} = 0 \text{ si } x-3 = 0 \Rightarrow x = 3; \quad \frac{x-3}{x^2} > 0 \text{ si } x > 3; \quad \frac{x-3}{x^2} < 0 \text{ si } x < 3.$$

$$\frac{x^2-1}{(x+2)^2} = 0 \text{ si } x^2-1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1;$$

$$\frac{x^2-1}{(x+2)^2} > 0 \text{ si } x < -1 \text{ o } x > 1; \quad \frac{x^2-1}{(x+2)^2} < 0 \text{ si } -1 < x < 1.$$

### 3. Inecuaciones de grado superior

Para resolver una inecuación de la forma  $P(x) < 0$  o  $P(x) > 0$ , donde  $P(x)$  es un polinomio de grado 3 o mayor, se procede como sigue:

1°. Se descompone  $P(x)$  en factores; para ello habrá que hallar las raíces de  $P(x) = 0$ .

Si estas raíces fuesen  $x_1, x_2, x_3$ , supuesto  $P(x)$  de tercer grado, se tendría:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d < 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) < 0$$

2°. Representar las raíces sobre la recta y determinar los intervalos que se obtienen.

3°. Estudiar el signo de  $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) < 0$  en cada uno de esos intervalos.

4°. Dar la solución.

#### Ejemplo:

□ La inecuación  $x^3 - 4x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-5) < 0$

Representadas las raíces  $x = -1, x = 0$  y  $x = 5$  se obtiene los intervalos:

$$x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < 5 \quad x > 5$$

Los signos de los factores de  $x(x+1)(x-5)$  son:

$$(-)(-)(-) \rightarrow (-) \quad (-)(+)(-) \rightarrow (+) \quad (+)(+)(-) \rightarrow (-) \quad (+)(+)(+) \rightarrow (+)$$

En consecuencia, las soluciones de la inecuación son:  $x < -1$  o  $0 < x < 5$

### 4. Inecuaciones con valor absoluto

La expresión  $|A| < n$  significa que  $-n < A < n$ .

#### Ejemplos:

□  $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$

□ Análogamente, la inecuación  $|x-2| < 1$  indica que  $-1 < x-2 < 1$ . Esto es:  $1 < x < 3$ .

Para obtener ese resultado hemos sumado 2 a los tres miembros de las desigualdades:

$$-1 < x-2 < 1 \Rightarrow -1+2 < x-2+2 < 1+2 \Rightarrow 1 < x < 3$$

□ De igual modo, la inecuación  $|x+1| > 3$  indica que  $-3 > x+1$  o  $x+1 > 3$ . Esto es:  $x < -4$  o que  $x > 2$ .

Para obtener esos resultados hay que resolver las inecuaciones por separado:

$$-3 > x+1 \Rightarrow -3-1 > x+1-1 \Rightarrow -4 > x \Rightarrow x < -4$$

$$x+1 > 3 \Rightarrow x+1-1 > 3-1 \Rightarrow x > 2.$$

**Observación:** Nótese que en la solución de la primera inecuación,  $|x-2| < 1$ , interviene el cuantificador “y”:  $x > 1$  y  $x < 3$ , intervalo  $(1, 3)$ ; o bien, conjunto  $(1, +\infty) \cap (-\infty, 3)$ .

En cambio, en las soluciones de la segunda inecuación,  $|x+1| > 3$ , hay que utilizar el cuantificador “o”:  $x < -4$  o  $x > 2$ ; conjunto  $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

## 5. Inecuaciones con expresiones radicales

Podemos plantearnos las dos siguientes inecuaciones:

$$\sqrt{A} < n; \quad \sqrt{A} > n$$

donde A es una expresión con una incógnita y n es un número positivo.

- $\sqrt{A} < n \Rightarrow 0 \leq A < n^2$ . Ejemplo:  $\sqrt{x} < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 9$
- $\sqrt{A} > n \Rightarrow A > n^2$  Ejemplo:  $\sqrt{x} > 5 \Rightarrow x > 25$

Si intervienen otros términos se procederá utilizando los criterios generales ya estudiados. Además, se tendrá en cuenta que al elevar al cuadrado una desigualdad se pueden introducir errores (ganar o perder soluciones). También habrá que tener en cuenta si el signo + o - de la raíz puede afectar al resultado. Como en consecuencia de esto, es aconsejable comprobar los resultados.

Ejemplos:

□ De  $\sqrt{x} > -3$  podría deducirse que  $(\sqrt{x})^2 > (-3)^2 \Rightarrow x > 9$ . El resultado no es falso, pero es incompleto, pues la desigualdad se cumple siempre que  $x \geq 0$ .

□  $-\sqrt{x} < -3 \Rightarrow$  (multiplicando por -1)  $\sqrt{x} > 3 \Rightarrow x > 9$

□  $\frac{1}{\sqrt{x}} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \sqrt{x} \Rightarrow x > \frac{1}{4}$

□ Para resolver la inecuación  $\frac{\sqrt{x^2+x}}{x+2} > 0$  hay que aplicar las reglas del cociente y tener en cuenta el valor del radicando. Observa:

ESTÁ MAL:  $\frac{\sqrt{x^2+x}}{x+2} > 0 \Rightarrow x > -2$ . El motivo es que  $\sqrt{x^2+x}$  no está definido si  $-1 < x < 0$ .

ESTÁ BIEN:  $\frac{\sqrt{x^2+x}}{x+2} > 0 \Rightarrow x \in (-2, -1) \cup (0, +\infty)$ . Esto es:  $\{x > -2\} - \{-1 < x < 0\}$ .

□ Para resolver  $x - \sqrt{x} < 6$ , lo normal es hacer lo siguiente:

$x - \sqrt{x} < 6 \Rightarrow x - 6 < \sqrt{x} \Rightarrow (x-6)^2 < (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 < x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 < 0$   
 $\Rightarrow 4 < x < 9$ . (Los valores 4 y 9 son las soluciones de  $x^2 - 13x + 36 = 0$ ).

Sin embargo, la inecuación dada admite otras soluciones, por ejemplo  $x = 2$ . ¿Qué ha sucedido para que no salga directamente? El error se ha generado al hacer el cuadrado.

Fijémonos ahora en otra posibilidad:

$$x - \sqrt{x} < 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 6 < 0 \Rightarrow (\text{hacemos el cambio } \sqrt{x} = t) \Rightarrow t^2 - t - 6 < 0.$$

Resolvemos ahora la ecuación  $t^2 - t - 6 = 0$ , cuyas soluciones son:  $\sqrt{x} = t = 3$  y  $\sqrt{x} = t = -2$ . Si consideramos sólo el signo positivo de la raíz, que es lo habitual, y observamos que la x no puede tomar valores negativos, la solución es:

$$0 \leq \sqrt{x} = t < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 9$$

que es la solución correcta.

Ojo: Si  $A < B$  no es cierto que  $A^2 < B^2$ . Observa:  $-2 < 1$ , pero  $(-2)^2 > 1^2$ .

### Inecuaciones con dos incógnitas

Son desigualdades de la forma:  $ax + by < c$ ,  $ax + by > c$

El conjunto de soluciones de cualquiera de ellas es uno de los dos semiplanos en los que divide la recta  $ax + by = c$  al plano cartesiano.

- Si  $a > 0$ , la solución de  $ax + by < c$  es el semiplano situado a la izquierda; la solución de  $ax + by > c$  sería el semiplano de la derecha.

- Si se consideran las desigualdades  $ax + by \leq c$  o  $ax + by \geq c$ , el conjunto de soluciones contiene, además del semiplano correspondiente, a los puntos de la recta  $ax + by = c$ .

Ejemplos:

- Las soluciones de la inecuación  $2x + 3y < 12$  son todos los puntos del semiplano situado a la izquierda de la recta  $2x + 3y = 12$ . (Ver figura)
- Las soluciones de la inecuación  $x - 2y \geq -4$  son todos los puntos del semiplano situado a la derecha de la recta  $x - 2y = -4$ . (Ver figura)

