Sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas

Son expresiones de la forma

$$\begin{cases} f(x,y) = p \\ g(x,y) = q \end{cases},$$

donde *f* y *g* representan fórmulas con las incógnitas *x* e *y*.

La solución del sistema es el conjunto de valores, de pares de valores (x, y), que verifican las dos ecuaciones a la vez.

Es frecuente dar una interpretación geométrica de las soluciones, pues son los puntos comunes a las curvas que determinan cada una de las ecuaciones.

Si el sistema tiene solución se llama compatible; en caso contrario, incompatible.

- **Sistemas lineales (de dos ecuaciones con dos incógnitas)**

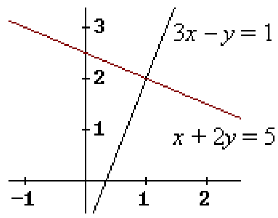
Son de la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

Se pueden resolver por los métodos de sustitución, igualación o reducción.

Ejemplos:

- Resolvemos por reducción el siguiente sistema: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

Multiplicamos por 2 la E2: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$



Sumamos ambas ecuaciones: 7x = 7 $\Rightarrow$ x = 1 $\Rightarrow$ y = 2.

Geométricamente significa que las rectas x + 2y = 5 y 3x – y =1, se cortan en el punto (1, 2).

- El sistema $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases}$ es incompatible.

Lo vemos por sustitución:

en la primera ecuación, y = 3x – 1

sustituimos en la segunda: –6x + 2(3x – 1) = 0 $\Rightarrow$ –6x + 6x – 2 = 0 $\Rightarrow$ –2 = 0, que es absurdo.

Resulta fácil comprobar que las ecuaciones dadas son las de dos rectas paralelas. Como no tienen ningún punto en común, el sistema es incompatible.

- **Sistemas no lineales (con dos incógnitas)**

Habitualmente, estos sistemas se presentan al querer determinar los puntos de corte de dos curvas, asunto necesario en geometría, en optimización, en integración, en la resolución de problemas, etc. Los esbozos gráficos y la comprobación de resultados se hace casi imprescindible.
Suelen resolverse por sustitución o por igualación.

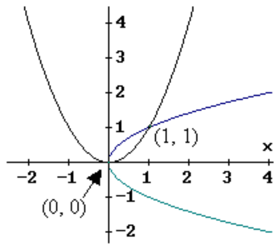
Ejemplos:

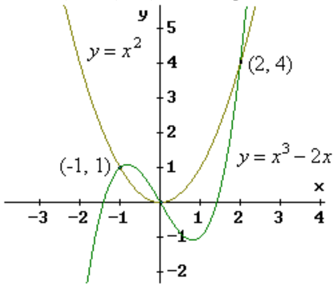
- Para hallar el punto de corte de las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases}.$$

Por igualación: $\sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow$ x = 0, x = 1

Para x = 0, y = 0: punto (0, 0). Para x = 1, y = 1: punto (1, 1). (Ver figura de la izquierda)





- Resolvemos $\begin{cases} y = x^3 - 2x \\ y = x^2 \end{cases}$

Por igualación: $x^3 - 2x = x^2 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow$ x = 0, x = –1, x = 2.

Para x = –1, y = 1: punto (–1, 1). Para x = 0, y = 0: punto (0, 0). Para x = 2, y = 4: punto (2, 4). (Ver figura de la derecha)

- **Aplicación de los sistemas a la resolución de problemas**

Los sistemas de ecuaciones, lineales o no, son una herramienta eficaz para la resolución de problemas. A continuación indicamos algunas posibilidades.

Ejemplos:

- La suma de dos números es 15 y la suma de sus inversos 5/18. ¿Qué números son?

Llamando *x* e *y* a los números se tiene: $\begin{cases} x + y = 15 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{18} \end{cases}.$

Multiplicando la segunda ecuación por 18*xy* se tiene: $\begin{cases} x + y = 15 \\ 18y + 18x = 5xy \end{cases}$

Despejando y en E1 y sustituyendo en E2 se tendrá:

y = 15 – x $\Rightarrow$ (E2) 18(15 – x) + 18x = 5x(15 – x) $\Rightarrow$ $5x^2 - 75x + 270 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ x = 6, x = 9

Los números buscados son 6 y 9.

- Se mezclan dos tipos de pipas de girasol, de 6,6 y 8,7 euros/kg, respectivamente, obteniéndose 200 kilos. Al secarse pierden un 12% de su peso, vendiéndose el conjunto a 9,6 euros/kg. ¿Qué cantidad de cada clase de pipas se tenía en un principio si el valor de la venta ha sido el mismo?

Si *x* e *y* los kilos originarios de cada tipo de pipas debe cumplirse que x + y = 200. Además, al perderse un 12% = 0,12 de peso, nos quedará 0,88 por cada kilogramo, en total 200 · 0,88 = 176 kilos.
El valor de esas pipas es: 176 · 9,6 = 1689,6 euros.
El valor inicial era 6,6x + 8,7y euros.
Como son iguales: 6,6x + 8,7y = 1689,6
Se obtiene el sistema siguiente, que resolveremos por sustitución:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 6{,}6x + 8{,}7y = 1689{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 200 - x \\ 6{,}6x + 8{,}7y = 1689{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 200 - x \\ 6{,}6x + 8{,}7(200 - x) = 1689{,}6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 200 - x \\ 6,6x - 8,7x = 1689,6 - 1740 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 200 - x \\ -2,1x = -50,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 200 - x \\ x = \dfrac{50,4}{2,1} = 24 \end{cases}$$

Se mezclaron, entonces, 24 kg de un tipo e y = 200 – 24 =176 kilos del otro tipo de pipas.