LOGARITMOS

¿Qué es un logaritmo y cómo se calcula?

El logaritmo de un número *x*, en una base *a*, es otro número *b* al que hay que elevar la base para que dé *x*. Con símbolos matemáticos se define como sigue:

$$\boxed{\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x}$$

Observaciones:

1. $\log_a x$ se lee *logaritmo en base a de x*, y significa que al número *x* se le asocia otro *b* que cumple de que $a^b = x$. Se trata, pues, de una transformación relacionada con la potenciación de base *a*, en la que a cada número *x* se le asocia el exponente *b* preciso para que $\underline{a^b = x}$. Por ejemplo, si *x* = 1000 y *a* = 10, el valor de *b* debe ser 3, ya que $10^3 = 1000$. En este caso escribiríamos $\log_{10} 1000 = 3$.

Igualmente, si *x* = 10000 y *a* = 10, el valor de *b* debe ser 4, ya que $10^4 = 1000$. En este caso escribiríamos $\log_{10} 10000 = 4$.

2. El valor del logaritmo de cualquier número comprendido entre 1000 y 10000 será un número comprendido entre 3 y 4. Esto es, si 1000 < *x* < 10000, entonces $\log_{10} 1000 < \log_{10} x < \log_{10} 10000$ $\Leftrightarrow 3 < \log_{10} x < 4$. Este resultado no se puede conocer directamente; se necesita calculadora.

3. La base *a* debe ser positiva y distinta de 1. Las bases usuales son *a* =10 y *a* = *e*, siendo *e* el número de Euler: *e* = 2,7182… A los logaritmos en base 10 se les llama *decimales* o logaritmos comunes; los logaritmos en base *e* se llaman *neperianos* o naturales. Ambos se pueden hallar con la ayuda de una calculadora, con las teclas $\boxed{\text{log}}$ y $\boxed{\text{ln}}$, respectivamente; y no es necesario especificar la base. Así, $\log_{10} 2500 = \log 2500 = 3{,}397940$, y $\log_e 325 = \ln 325 = 5{,}783825$.

4. El logaritmo de los números reales menores o iguales que 0 no está definido. Esto es, $\log(-1000)$ carece de sentido. En estos casos, la calculadora da un mensaje de error.

Ejemplos:

a) Aplicando la definición puede verse que:

$\log_2 16 = 4$, pues $2^4 = 16$ | $\log_5 25 = 2$, pues $5^2 = 25$

$\log_{10} 100 = 2$, pues $10^2 = 100$ | $\log 10 = 1$, pues $10^1 = 10$

$\log 1 = 0$, pues $10^0 = 1$ | $\log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3$

$\log_{10} 1000000000 = 8$ | $\log 10^n = n$, para todo *n*

Igualmente:

$\ln e^5 = 5$ | $\ln e^n = n$, para todo *n*.

b) Con calculadora:

log 87 = 1,939519... | ln 10 = 2,302585...

log 27,5 = 1,4393… | ln 5,39 = 1,6845.

log 0,00003 ≈ –4,5229 | ln 0,9 ≈ –0,1054

log (–6) = ERROR | ln 0 = ERROR

¿Cómo se opera con los logaritmos?

Cuando haya que realizar operaciones con logaritmos o calcular el logaritmo de expresiones en las que los números esté sujetos a cualquiera de las operaciones habituales, pueden utilizarse las propiedades que se indican a continuación, en donde *A*, *B* y *n* son números o expresiones algebraicas.

1. $\boxed{\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B}$

Ejemplos:

a) log 50 + log 20 = log (50 · 20) = log 1000 = 3.

b) $\log(25\cdot 300)=\log 25+\log 300=1{,}397940+2{,}477121=3{,}875061$

c) $\log 8x=\log 8+\log x$.

d) $\log(x^2-9)-\log(x+3)=\log\dfrac{x^2-9}{x+3}=\log\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\log(x-3)$

2. $\boxed{\log_a A^n=n\log_a A}$

Ejemplos:

a) log 12^8 = 8 · log 12 = 8 · 1,079181 = 8,633448.

b) $7\log 5=\log 5^7=\log 78125=4{,}892790$.

c) $\log x^8=8\log x$; $\log 8^x=x\log 8$

d) $\log\left(x^2+2\right)^5=5\log\left(x^2+2\right)$

3. $\boxed{\log_a\dfrac{A}{B}=\log_a A-\log_a B}$

Ejemplos:

a) $\log\dfrac{5}{200}=\log 5-\log 200=0{,}698970-2{,}301030=-1{,}602060$

b) $\log 2000-\log 8=\log\dfrac{2000}{8}=\log 250$

c) $\log\dfrac{5x^2+3x}{2x-1}=\log\left(5x^2+3x\right)-\log(2x-1)$

d) $\log\left(x^2-9\right)-\log(x+3)=\log\dfrac{x^2-9}{x+3}=\log\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\log(x-3)$

4. $\boxed{\log_a 1=0;\ \log_a a=1;\ \log_a a^n=n}$

Observación:

En las operaciones con logaritmos son frecuentes los errores. Los más comunes se derivan de la supuesta linealidad de los logaritmos. Así algunos suelen escribir que $\log(A\cdot B)=(\log A)\cdot(\log B)$ o que $\log\dfrac{A}{B}=\dfrac{\log A}{\log B}$. Descubrir tales errores es relativamente fácil; basta aplicarlo a situaciones concretas y sencillas. Por ejemplo, $\log(10\cdot 10)=\log 100=2\neq(\log 10)\cdot(\log 10)=1\cdot 1=1$;

o bien, $\log\dfrac{100}{10}=\log 10=1\neq\dfrac{\log 100}{\log 10}=\dfrac{2}{1}=2$

Ejercicio.

Expresa como un solo logaritmo las expresiones:

a) log 200 + log 18– log 36

b) 5 · log 5 + 3 · log 2 – log 25

c) $\log(2x-1)+\log(x+3)-\log(3x+1)$

d) $3\log(x+2)-2\log(x-1)+\log\left(x^2-1\right)$

Para qué se usan los logaritmos

Los logaritmos se inventaron (a principios del siglo XVII) para simplificar los cálculos matemáticos de multiplicación, división, potenciación y radicación, sobre todo cuando los resultados son números muy grandes y básicamente lo que importa es su orden de magnitud.
Para entender esta idea hay que observar:
1. En base 10, el logaritmo de las sucesivas potencias de 10 es el exponente respectivo. Esto es:
$\log 1 = \log 10^0 = 0$; $\log 10 = \log 10^1 = 1$; $\log 100 = \log 10^2 = 2$;
$\log 1000 = \log 10^3 = 3$; $\log 10000 = \log 10^4 = 4$; y, en general, $\log 10^n = n$.
2. En base 10, cuando un número multiplica su valor por 10, su logaritmo aumenta en una unidad. (Por ejemplo: log 8,3 = 0,919078; log 83 = 1,919078; log 830 = 2,919078; y así sucesivamente.) Y al revés, cuando el valor del logaritmo de dos números se diferencia en una unidad, uno de ellos es diez veces mayor que el otro.
3. En base 10, el valor del logaritmo de cualquier número comprendido entre 10^p y 10^{p+1} es un número comprendido entre p y $p + 1$. Así, por ejemplo, si $\log A = 6{,}2$, el valor de A está entre 10^6 y 10^7; luego el orden de magnitud de A es 6. Análogamente, si $\log B = 12{,}48$, el número B es de orden de magnitud 12. Y si $\log C = -4{,}3$, el número C es de orden de magnitud -5.
4. Si $\log A > \log B \Rightarrow A > B$; y al revés. En consecuencia, la magnitud de determinadas variables puede ordenarse comparando los valores de sus respectivos logaritmos.

Escalas logarítmicas

Se llama escala logarítmica aquella en la que en vez de indicar el valor de la variable (de una cantidad) se indica el valor de su logaritmo. Así,
10, 100, 1000, 10000... se sustituyen por 1, 2, 3, 4, …que son sus respectivos logaritmos decimales. La ventaja de hacer este cambio radica en que es más cómodo representar en un eje las cantidades 1, 2, 3 o 4, que las originales 10, 100, 1000 o 10000.

Un ejemplo de escala logarítmica es el pentagrama utilizado en occidente para escribir música, pues, como se ve en el gráfico, la diferencia en la altura del sonido es proporcional al logaritmo de la frecuencia (de un *do* grave al *do* siguiente más agudo la frecuencia se dobla. Es decir: que la sucesión de frecuencias de las notas *do* están en progresión geométrica). [La escala logarítmica es de base 2.] (Cfr. http://www.epsilones.com/paginas/t-musica.html#musica-escalatem)

El decibelio es una unidad de medida del nivel de intensidad del sonido. Se mide en una escala logarítmica de base 10. [Puede verse Wikipedia, "decibelio".]

La fuerza de los terremotos se mide usando la escala de Richter, que es logarítmica de base 10. Un terremoto de magnitud 7 en dicha escala es 10 veces más potente que otro de magnitud 6, y 100 veces más potente el de magnitud 5, por ejemplo. [La magnitud de un terremoto puede medirse como $M = \log_{10} P$, donde P indica cuántas veces mayor ha sido la amplitud de la onda sísmica del terremoto que la onda de referencia (la de situación normal)].

Antilogaritmo

Es la transformación inversa del logaritmo. Esto es, si logaritmo de $A = b$, entonces antilogaritmo de $b = A$. ($\log A = b \Leftrightarrow \text{antilog}\, b = A$)
En algunas las calculadoras se indica $\log^{-1}$ y se halla pulsando sucesivamente las teclas SHIFT y log.

Ejemplos: a) antilog 3 = 1000; b) antilog 2,5 = 316,227766.)