ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. Las **ecuaciones exponenciales** son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente. Algunos ejemplos son:

$3^x = 9$; $\frac{1}{2^x} = 32$; $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$; $17^x = 1700$

- En las **ecuaciones logarítmicas** la incógnita va ligada con algún logaritmo. Algunos ejemplos son:

$\log x = 2$; $3 + \log(x + 1000) = 7$; $\log(x + 6) - 2 \cdot \log(x - 3) = 1$

Suelen resolverse aplicando las propiedades de las potencias y de los logaritmos, además de las operaciones algebraicas usuales. Alguna vez, en las exponenciales con sumandos, suele dar resultado el cambio de variable $a^x = t$.

Propiedades:

1. $A^{f(x)} = A^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$
2. $\log_a(f(x)) = \log_a(g(x)) \Rightarrow f(x) = g(x)$

Ejemplos:

1. La ecuación $3^x = 9$ es inmediata: $x = 2$.
2. Para resolver $\frac{1}{2^x} = 32$, hay que expresarla en la forma $2^{-x} = 32 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^5 \Rightarrow x = -5$.
3. Para resolver $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$ hay que hacer el cambio $2^x = t$, con lo cual:

$$4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t - 24 = 0$$

La última ecuación, que es de segundo grado, tiene por soluciones $t = 8$ y $t = -3$.
Para $t = 8$, se tiene $t = 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.
Para $t = -3$, $t = 2^x = -3$, que es imposible.
En consecuencia, la solución es $x = 3$.

4. La ecuación $\log x = 2$ es inmediata, pues, por la definición de logaritmo: $\log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 \Rightarrow x = 100$.
5 La ecuación $\log x = 2$ es inmediata, pues, por la definición de logaritmo: $\log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 \Rightarrow x = 100$.
6. La ecuación $\log(9^{x-1} + 7) = 2\log(3^{x-1} + 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log(9^{x-1} + 7) = \log(3^{x-1} + 1)^2 \Leftrightarrow 9^{x-1} + 7 = (3^{x-1} + 1)^2 \Rightarrow 9^{x-1} + 7 = 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{x-1} + 1 \Rightarrow$$

$$2 \cdot 3^{x-1} = 6 \Rightarrow 3^{x-1} = 3 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

2. Casos fáciles de ecuaciones ligadas a exponenciales y logaritmos

Son los siguientes:

$a^x = b$; $a^b = x$; $x^a = b$;
$\log_a x = b$; $\log_a b = x$; $\log_x a = b$

Observa que en ningún caso hay sumandos.
Se resuelven empleando la definición de logaritmo y/o la calculadora.

- $\boxed{\text{Ecuación } a^x = b.}$ (Es necesario que *a* y *b* sean positivos)

Se resuelven aplicando logaritmos.

Ejemplo: $3^x = 6 \Rightarrow \log 3^x = \log 6 \Rightarrow x\log 3 = \log 6 \Rightarrow x = \dfrac{\log 6}{\log 3} = \dfrac{0{,}778...}{0{,}477...} = 1{,}6309$

$3^x = 6 \to$ [error] OJO: un ERROR típico es decir, x = 2.

- $\boxed{\text{Ecuación } a^b = x}$. (Si *a* es negativo puede que esta expresión no tenga sentido)

Es un ejercicio común de potenciación. Salvo en casos inmediatos, se resuelve con la calculadora.

Ejemplo: Para hallar $3^{2{,}1} = x$ se usa la calculadora, así:

3 $\boxed{\wedge}$ 2,1 $\boxed{=}$ 10,04510857 $\Rightarrow$ x = 10,04510857.

- $\boxed{\text{Ecuación } x^a = b}$. (Si *b* es negativo esta expresión no tiene sentido)

Puede resolverse directamente con la calculadora si tenemos en cuenta que:

$$x^a = b \Leftrightarrow \sqrt[a]{x^a} = \sqrt[a]{b} \Leftrightarrow x = b^{1/a}$$

También se resuelven aplicando logaritmos. (O antilogaritmos.)

Observación: Recuerda, el antilogaritmo de un número *a*, antilog *a*, es el número *k* que cumple que $\log k = a$. Por ejemplo, antilog 2 = 100, pues log 100 = 2. Con la calculadora se obtiene aplicando sucesivamente las teclas: 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{log}}$ o $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{log}}$ 2, dependiendo del modelo

Ejemplo: La ecuación $x^{4,2} = 4{,}2$ puede resolverse de dos formas:

a) Despejando: $x^{4,2} = 4{,}2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 4{,}2^{1/4,2} = 4{,}2^{0{,}2380952381} = 1{,}407319444$$

b) Aplicando logaritmos:

$x^{4,2} = 4{,}2 \Rightarrow \log x^{4,2} = \log 4{,}2 \Rightarrow 4{,}2\log x = \log 4{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = \dfrac{\log 4{,}2}{4{,}2} = \dfrac{0{,}6232492904}{4{,}2} = 0{,}1483926882 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ x = antilog 0,1483926882 = 1,407319444

Ejercicio.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1{,}3^7 = x$ b) $3{\cdot}x^3 = 375$ c) $8^{2x} = 45$

Sol. a) 6,2748517; b) 4,999999; c) 0,9153088

- $\boxed{\text{Ecuación } \log_a x = b}$ Se resuelve empleando la definición de logaritmo y la potenciación.

Ejemplos:

1. log x = 2,3 $\Rightarrow$ x = $10^{2,3}$ $\Rightarrow$ x = 199,5262315 (También: x = antilog 2,3)
2. $\log_3 x = -1{,}3$ $\Rightarrow$ x = $3^{-1,3}$ = 0,2397410311
3. ln x = 0,8 $\Rightarrow$ x = antiln 0,8 = $e^{0,8}$ = 2,225540928.

- $\boxed{\text{Ecuación } \log_a b = x}$ Si las bases son 10 o *e* se resuelven directamente con la calculadora; en cualquier otro caso hay que aplicar la definición de logaritmo. (O aplicar la fórmula del cambio de base.)

Observación: Recuerda, para calcular el logaritmo en cualquier base no decimal puede utilizarse la fórmula $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$.

Ejemplos:

1. $\log 13{,}6 = x \Rightarrow$ x = 1,1335.
2. $\log_{1/2} 4 = x \Rightarrow \dfrac{1}{2^x} = 4 \Rightarrow 2^{-x} = 2^2 \Rightarrow x = -2$

• $\boxed{\text{Ecuación } \log_x a = b}$ Aplicando la definición de logaritmo se transforma en otra ecuación ya vista, pues:

$$\log_x a = b \;\Rightarrow\; a = x^b \;\Rightarrow\; x = a^{1/b}$$

Ejemplos:

1. $\log_x 1000 = 5 \Rightarrow x^5 = 1000 \Rightarrow x = 1000^{1/5} = 3{,}98107$.
2. $\log_x 64 = 2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$.

Ejercicio.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_5 200 = x$ b) $\log_x 1024 = 10$ c) $\ln 3x = 3$

[sol] a) 3,2920; b) 2, c) $e^3/3$

3. Otras ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Además de las ecuaciones ya vistas, podemos plantearnos otras en las que intervengan sumas o productos. A continuación se indican algunos ejemplos.

Ejemplos:

1. Para resolver la ecuación log (x + 5) + log (x – 5) = log 11 puede aplicarse la propiedad del logaritmo de una suma. Así:

$\log(x + 5) + \log(x - 5) = \log 11 \Leftrightarrow \log[(x+5)(x-5)] = \log 11$

Operando:

$\log(x^2 - 25) = \log 11 \Rightarrow x^2 - 25 = 11 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$.

NOTA: la solución x = –6 no es factible, pues daría lugar a una expresión inicial sin sentido.

2. La ecuación $2\cdot 3^x - 5\cdot 3^{x-1} = 3 \Leftrightarrow 2\cdot 3^x - 5\cdot\dfrac{3^x}{3} = 3 \Leftrightarrow 6\cdot 3^x - 5\cdot 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.

3. $xe^x - e^x = 0 \Rightarrow (x-1)e^x = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

4. La ecuación $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 224 \Leftrightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 = 224 \Rightarrow 2^x(1 + 2 + 4) = 224 \Rightarrow 2^x = \dfrac{224}{7} \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow x = 5$.