Puntos, rectas y planos en el espacio

Observación: La mayoría de los problemas resueltos a continuación se han propuesto en los exámenes de Selectividad.

1. La recta $x=\dfrac{1-y}{3}=\dfrac{2-z}{2}$ corta a los tres planos coordenados en tres puntos.
Determina las coordenadas de estos puntos, las distancias existentes entre cada par de ellos e indica cuál es el que se encuentra en medio de los otros dos.

Solución:

La recta $x=\dfrac{1-y}{3}=\dfrac{2-z}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-2}{-2} \Rightarrow$ (en paramétricas) $\begin{cases} x=t \\ y=1-3t \\ z=2-2t \end{cases}$

Puntos de corte con los planos coordenados.
- Con el plano $x = 0$ ($\Rightarrow t = 0$): A = (0, 1, 2)
- Con el plano $y = 0$ ($\Rightarrow t = 1/3$): B = (1/3, 0, 4/3)
- Con el plano $z = 0$ ($\Rightarrow t = 1$): C = (1, −2, 0)

Distancias:

d(A, B) = $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

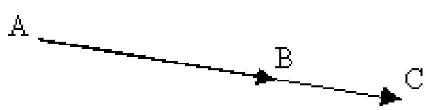
d(A, C) = $\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

d(B, C) = $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$

Las distancias halladas son los módulos de los vectores

AB = $\left(\frac{1}{3},-1,-\frac{2}{3}\right)$; **AC** = (1, −3, −2); **BC** = $\left(\frac{2}{3},-2,-\frac{4}{3}\right)$

Como los tres vectores tienen el mismo sentido y el más largo es **AC**, la situación debe ser así:



El punto intermedio es B.

2. Considera los puntos del espacio A(0, 0, 1), B(1, 1,2) y C(0, −1, −1).
a) Encuentra la ecuación del plano ABC.
b) Si D es el punto de coordenadas (k, 0, 0), ¿cuánto ha de valer k para que los cuatro puntos A, B, C y D sean coplanarios?

Solución:
a) Como **AB** = (1, 1, 1) y **AC** = (0, −1, −2), la ecuación general viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff -x + 2y - z + 1 = 0 \iff x - 2y + z - 1 = 0$$

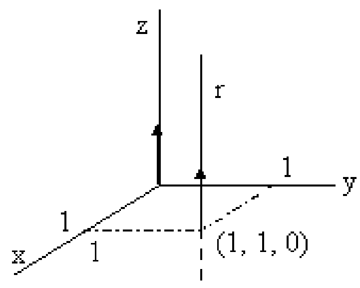
b) El punto D(k, 0, 0) será del plano cuando cumpla su ecuación; esto es:
$k - 0 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$
Por tanto, D = (1, 0, 0).

---

3. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 1, 0) y es paralela al eje *z* (una ecuación: la que quieras). Haz un esquema dibujando los ejes, el punto y la recta.

Solución:
La ecuación del eje z es $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (corte de los planos $x = 0$ e $y = 0$)
La ecuación de la paralela pedida será $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ (corte de los planos $x = 1$ e $y = 1$)

Gráficamente.



---

4. Halla las coordenadas del punto intersección de la recta $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$ y del plano $2x - y + z - 1 = 0$.

Solución:
Las ecuaciones paramétricas de la recta dada son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene:
$2(1 + t) - 1 + (1 - t) - 1 = 0 \Rightarrow t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$

El punto de corte será $\begin{cases} x = 1 - 1 \\ y = 1 \\ z = 1 - (-1) \end{cases} \rightarrow$ P(0, 1, 2)

5. a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r_1 que pasa por los puntos A = (1, 2, 3) y B = (2, 2, 3).
b) Calcula la ecuación general del plano π que pasa por los puntos A, B y C = (2, 2, 4).
c) ¿Cuántos planos distintos pueden formarse con los puntos A, B, C y D = (1, 2, 4)? Justifica tu respuesta.
d) Prueba que los puntos A, B, C y D anteriores forman un cuadrado y calcula su área.

Solución:
a) El vector de dirección de la recta es: **AB** = (2, 2, 3) − (1, 2, 3) = (1, 0, 0)

Sus ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$; o bien: $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

b) El vector **BC** = (2, 2, 4) − (2, 2, 3) = (0, 0, 1)
El plano π está determinado por el punto A y por los vectores **AB** y **BC**; su ecuación es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 0 & 0 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \pi: y = 2$$

c) El punto D también cumple la ecuación del plano π; por tanto, los cuatro puntos sólo definen un plano.

d) Los puntos A, B, C y D formarán un cuadrado cuando los vectores **AB**, **BC**, **CD** y **DA** sean correlativamente perpendiculares y todos tengan el mismo módulo.
Como **AB** = (1, 0, 0), **BC** = (0, 0, 1), **CD** = (−1, 0, 0) y **DA** = (0, 0, −1) se comprueba que:
AB · **BC** = 0, **BC** · **CD** = 0, **CD** · **DA** = 0 y **DA** · **AB** = 0
También es obvio que todos tienen módulo 1. Por tanto, su área será 1 unidad cuadrada.

---

6. Se considera la recta de ecuación paramétrica: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$

Halla su ecuación como intersección de dos planos (ecuaciones cartesianas).
¿Existe algún valor de s tal que el punto (1, 2s, s) pertenezca a la recta? Razonar la respuesta tanto en caso afirmativo como en caso negativo.

Solución:
Para encontrar las ecuaciones cartesianas despejamos t en las ecuaciones paramétricas e igualamos:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x-1}{3} \\ t = y + 1 \\ t = \dfrac{z-2}{-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = y + 1 \\ \dfrac{z-2}{-4} = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 4y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Para que el punto (1, 2s, s) pertenezca a ambos planos es necesario que

$$\begin{cases} 1 - 6s - 4 = 0 \\ 8s + s + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -1/2 \\ s = -2/9 \end{cases}$$

Como se obtienen dos valores diferentes de s el punto (1, 2s, s) no puede pertenecer a ambos planos.

7. Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P = (1, 1, 0) y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} 3x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

La recta pedida será la intersección de dos planos: π_1, que pasa por P y contiene a r_1, y π_2, que pasa por P y contiene a r_2

Expresamos ambas rectas en paramétricas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{con } \vec{v}_{r1} = (1, 1, 1) \text{ y } A \in r_1,\ A = (0, 1, 1)$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = h \\ z = -2 - 2h \end{cases} \quad \text{con } \vec{v}_{r2} = (0, 1, -2) \text{ y } B \in r_2,\ B = (1, 0, -2)$$

El plano π_1 viene dado por A, $\vec{v}_{r1}$ y **AP** = (1, 0, −1), su ecuación es:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + z + 1 = 0$$

El plano π_2 viene dado por B, $\vec{v}_{r2}$ y **BP** = (0, 1, 2), su ecuación es:

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z+2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$$

Por tanto, la recta pedida es:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x = 1; \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2} \right.$$

8. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$.

a) Escribe la recta en forma paramétrica.
b) Para cada punto P de *r*, determina la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje OZ.

Solución:
a) Despejando *y* y *z* en función de *x* se tiene:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} y=-1-x \\ z=3+2x \end{cases}$$

Parametrizando x obtenemos: $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=-1-t \\ z=3+2t \end{cases}$

b) Los puntos P de r son de la forma P = (t, −1 − t, 3 + 2t).

Las rectas perpendiculares al eje OZ deben estar en un plano de ecuación z = k (paralelos a la "base" del triedro cartesiano). Por tanto, la perpendicular que pasa por P debe cortar al eje OZ en el punto Q = (0, 0, 3 + 2t); la ordenada z de ambos puntos es la misma, constante.
En consecuencia, el vector de dirección de las rectas pedidas será **QP** = (t, −1 − t, 3 + 2t) − (0, 0, 3 + 2t) = (t, −1 − t, 0).

Las rectas pedidas quedan determinadas por el punto Q y el vector **QP**. Su ecuación, para cada valor de t, será:

$$recta(P,Q) \equiv \begin{cases} x = \quad t\lambda \\ y = \quad (-1-t)\lambda \\ z = 3+2t \end{cases}$$

NOTA. El parámetro de estas rectas es λ, mientras que t determina cada punto P de r. Por ejemplo, para t = 1, el punto P = (1, –2, 5), el punto Q = (0, 0, 5), y la ecuación de la recta perpendicular al eje OZ que pasa por P será $s \equiv \begin{cases} x = \quad \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

9. Encontrar la ecuación paramétrica de la recta dada por $r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

¿Existe algún valor de s tal que el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razonar la respuesta tanto en caso afirmativo como negativo.

Solución:
Para encontrar las ecuaciones paramétricas de r debe resolverse el sistema asociado.

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} 3x + y = -z \\ x - y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \text{(haciendo } z = t\text{)} \; r \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4}t \\ y = \dfrac{5}{4}t \\ z = t \end{cases}$$

Si el punto $(-3, s, s)$ fuese de la recta deberá cumplir sus ecuaciones; esto es:

$$r \equiv \begin{cases} 3\cdot(-3) + s + s = 0 \\ -3 - s + 2s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 9/2 \\ s = 3 \end{cases}$$

Como se obtienen dos valores diferentes para s, el punto $(-3, s, s)$ no puede ser de la recta, cualquiera que sea el valor de s.

---

10. Sean los puntos A(2, 3, 0) y B(−2, 1, 4). Determina:
a) Ecuación del plano π mediatriz del segmento AB.
b) El volumen del tetraedro formado por π y los tres planos coordenados.
c) Ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el origen.

Solución:
a) El plano pedido pasa por el punto medio de A y B y tiene como vector normal el vector **AB**.

Punto medio: M = $\left(\dfrac{2-2}{2}, \dfrac{3+1}{2}, \dfrac{0+4}{2}\right)$ = (0, 2, 2).

Vector AB: **AB** = (−2, 1, 4) − (2, 3, 0) = (−4, −2, 4).

La ecuación del plano es:

$$-4(x - 0) - 2(y - 2) + 4(z - 2) = 0 \Rightarrow -4x - 2y + 4z - 4 = 0 \Rightarrow 2x + y - 2z = -2$$

b) El plano corta a los ejes coordenados en los puntos:
$P_X = (-1, 0, 0)$; $P_Y = (0, -2, 0)$; $P_Z = (0, 0, 1)$

El volumen del tetraedro vendrá dado por:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) El vector de dirección de la recta es el normal al plano; esto es: $\vec{v}_r$ = (2, 1, −2).

La ecuación de la recta será: $r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$

Puntos simétricos

11. Considera el punto P(2, 0, 1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=6 \\ z=2 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a *r*.
b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Solución:

a) En paramétricas $r \equiv \begin{cases} x=6-2t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$, siendo R = (6, 0, 2) un punto de *r* y $\vec{v}_r$ = (–2, 1, 0) su vector de dirección.

El plano pedido viene dado por R, $\vec{v}_r$ y **PR** = (6, 0, 2) − (2, 0, 1) = (4, 0, 1).

Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x=6-2t+4h \\ y=t \\ z=2+h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & -2 & 4 \\ y & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4z + 2 = 0$$

b) Si P´ es el punto simétrico de P respecto de r, entonces su punto medio M debe ser de la recta r; y, además, los tres puntos deben estar en el plano perpendicular a r que pasa por P.

Dicho plano es π: –2(x − 2) + y = 0 ⇒ 2x − y − 4 = 0.

El punto de intersección de r con π es M:

2(6 − 2t) − t − 4 = 0 ⇒ t = 8/5 ⇒ M = (14/5, 8/5, 2)

Si P´ = (*a, b, c*), el punto medio entre P y P´ es: M = $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$

Luego: $\frac{a+2}{2} = \frac{14}{5} \Rightarrow a = 18/5$; $\frac{b}{2} = \frac{8}{5} \Rightarrow b = 16/5$; $\frac{c+1}{2} = 2 \Rightarrow c = 3$.

El punto pedido es P´= (18/5, 16/5, 3).

---

12. Calcúlese el simétrico de P(1, 1, 1) respecto del plano $x + y + z = 0$.

Solución:

Sea P´(a, b, c) el punto buscado. Debe cumplir:

1. El vector **PP´** debe ser paralelo al normal del plano $\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1)
2. El punto medio (M) del segmento PP´ debe ser del plano.

Por tanto:

PP´ = (a − 1, b − 1, c − 1) = k(1, 1, 1) ⇒ a − 1 = k; b − 1 = k; c − 1 = k [1]

M = $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}\right) \in \pi \Rightarrow$ (a + 1)/2 + (b + 1)/2 + (c + 1)/ 2 = 0 ⇒

⇒ 3 + a + b + c = 0 [2]

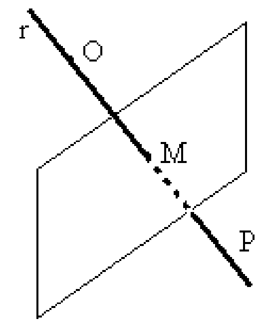
Sustituyendo [1] en [2]:

3 + 3k + 3 = 0 ⇒ k = −2 ⇒ a = −1,; b = −1; c = −1.

El punto buscado es P´(−1, −1, −1).

13. Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$.
a) Hallar el punto simétrico del (0, 0, 0) respecto de π.
b) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ.
c) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.

Solución:
Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ el punto simétrico de O = (0, 0, 0) respecto de π.



Ambos puntos P y O estarán en la recta *r*, perpendicular a π por O. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y O.

Como el vector normal del plano es $\vec{v}_\pi = (1, 2, 3)$, se deduce que $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

Corte de recta y plano: $\lambda + 4\lambda + 9\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 3/7$.

Por tanto, $M = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$

Punto medio entre P y O: $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right)$

Como $M = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right) = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right) \Rightarrow x_0 = \frac{6}{7},\ y_0 = \frac{12}{7},\ z_0 = \frac{18}{7}$

Luego, el punto simétrico es $P = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{189}{7}\right)$

b) El plano π', perpendicular a π, que contiene a OZ viene determinado por el punto O = (0, 0,) y por los vectores $\vec{v}_\pi = (1, 2, 3)$ y $\vec{v}_{OZ} = (0, 0, 1)$.

Su ecuación es: $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 0 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$

c) Los puntos de intersección de π con los ejes coordenados son: A = (6, 0, 0), B = (0, 3, 0) y C = (0, 0, 2). Por tanto, el volumen del tetraedro vendrá dado por:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

14. Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r \equiv (x, y, z) = (1,0,0) + \lambda(0,1,1)$, y el punto P(1, 1, 0), se pide:

a) Hallar la ecuación de una recta *s* que sea perpendicular a *r* y pase por P.
b) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de *r*.
c) Hallar el punto P'', simétrico de P respecto de π.

Solución:
Un punto genérico X de la recta *r* es, X = (1. λ, λ).

El vector **PX** = (0, λ − 1, λ). Este vector debe ser perpendicular a $\vec{v}_r$ = (0, 1, 1), luego

$$(0, \lambda - 1, \lambda) \cdot (0, 1, 1) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = ½ \Rightarrow X = (1, ½, ½)$$

Por tanto, **PX** = (0, −1/2, 1/2) ≡ (0, −1, 1) y $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = \quad t \end{cases}$

b) El punto P' debe cumplir que **OP'** = **OP** + 2**PX** = (1, 1, 0) + (0, −1, 1) = (1, 0, 1).

Luego, P' = (1, 0, 1).

<u>Nota:</u> Convendría hacer una figura para explicarlo.

c) Recta perpendicular a π por P: $u: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \quad \lambda \end{cases}$ $(\vec{v}_u = \vec{v}_\pi = (1, 1, 1)$

Punto de corte, Q, del plano π con la recta *u*:

$$1 + \lambda + 1 + \lambda + \lambda = 1 \Rightarrow 3\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -1/3 \Rightarrow Q = (2/3, 2/3, -1/3)$$

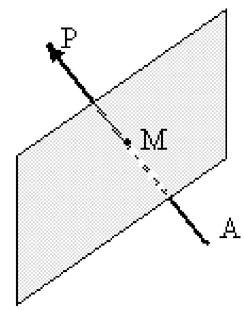
Como Q debe ser el punto medio entre P = (1, 1, 0) y P'' = (x, y, z), se tiene:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1/3; \quad \frac{y+1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 1/3; \quad \frac{z}{2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow z = -2/3$$

Por tanto, P'' = (1/3, 1/3, −2/3).

15. Para cada valor de a los puntos P = (1, 2, 3) y A = (0, 1, a) son simétricos respecto a un plano.
Halla, de forma razonada, la ecuación de dicho plano. En particular encuentra el plano para a = 2.

Solución:
El plano buscado es perpendicular al vector **AP** (este será su vector característico) y pasa por el punto medio de ambos, M.



AP = (1, 2, 3) − (0, 1, a) = (1, 1, 3 − a)

M = $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3+a}{2}\right)$

Su ecuación será:

$$1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+1\cdot\left(y-\frac{3}{2}\right)+(3-a)\cdot\left(z-\frac{3+a}{2}\right)=0$$

Operando, se tiene:

$$2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(y-\frac{3}{2}\right)+2(3-a)\cdot\left(z-\frac{3+a}{2}\right)=0 \Rightarrow 2x+2y+2(3-a)z-13+a^2=0$$

Para el caso de a = 2, queda: $2x+2y+2z-9=0$