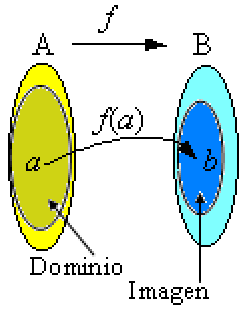
Tema 2. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Concepto de función

Dados dos conjuntos **A** y **B**, una función de **A** en **B** es una relación (una ley) que asigna a cada elemento de **A** uno y sólo un elemento de **B.**
La notación *f*: **A** → **B** indica que *f* es una función de **A** en **B**; mientras que $f(a) = b$ indica que al elemento *a* de **A** se le asocia el elemento *b* del conjunto **B**. También se dice que *b* es la imagen de *a*. El elemento *a* y su imagen *b* determinan el par (*a*, *b*). Para cada *a*, su imagen *b* debe ser única.
Con esto, puede decirse que: "Una función *f* entre dos conjuntos **A** y **B** es un conjunto de pares ordenados (*a*, *b*), de manera que no hay dos pares con el mismo primer elemento".



Así, por ejemplo, los pares (2, 1) y (2, 3) no pueden pertenecer a la misma función, pues eso indicaría que al número 2 le corresponden dos números, el 1 y el 3, en contra de que la correspondencia debe ser única.

Dominio de *f*, Dom(*f*). Es el conjunto de los elementos de **A** que intervienen en la relación.
Imagen o recorrido de una función *f*, Im(*f*), es el conjunto de valores que toma $f(a)$ cuando *a* pertenece al dominio.
Si la función viene dada por el conjunto de pares (a_i, b_i), su dominio está formado por los elementos a_i, mientras que su imagen son los elementos b_i.

Función real de variable real. Es una función que asocia a cada número real otro número real. Se indica así: *f*: **R** → **R**.
Si el par (*x*, *y*) pertenece a la función *f*, significa que $f(x) = y$. Así pues, el domino lo forman los números *x* para los cuales existe el valor de $f(x)$. La imagen, el conjunto de valores que toma $f(x)$ cuando *x* pertenece al dominio; es, por tanto, el conjunto de resultados.
A *x* se la llama variable independiente. Cuando se representa se hace en el eje horizontal, el eje de abscisas, el eje *OX*. La *y* es la variable dependiente. Se representa en el eje vertical o de ordenadas, el eje *OY*. Ambas variables son números reales.

- Las funciones reales suelen darse mediante una fórmula o expresión algebraica. Por ejemplo: $f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = +\sqrt{3-x}$. También se escribe: $y = x^2 - 3x$; $y = \sqrt{3-x}$

Ejemplos:
a) La función $f(x) = x^2 - 3x$ asocia al número 2 → $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$; a 3 → 0; a −1 → 4.
El dominio de esta función es Dom(*f*) = **R**, todos los números reales, pues para cualquier número real *x* tiene sentido (puede hacerse) la operación $x^2 - 3x$.
El recorrido de $f(x) = x^2 - 3x$ es el conjunto de resultados que tome la expresión $x^2 - 3x$ para cualquier valor de *x*. (Más arriba se ha visto que −2, 0 y 4 son del recorrido.)

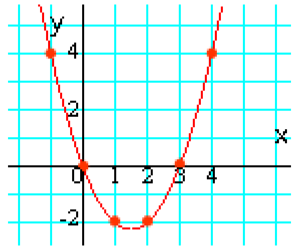
b) La función $g(x) = +\sqrt{3-x}$ asocia al número 2 → $g(2) = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1$; ; a 3 → 0; a −1 → 2.
En cambio, a 4 no puede asociarle ningún número real, pues $g(4) = \sqrt{3-4} = \sqrt{-1}$.
El dominio de $g(x)$ está formado por los números reales menores o iguales que 3:
$\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \le 3\} = (-\infty, 3]$.
El recorrido de $g(x) = +\sqrt{3-x}$ son los resultados que se obtienen al calcular la raíz cuando $x \le 3$: son los números reales mayores o iguales que 0. Esto es, $\text{Im}(g) = [0, +\infty)$.

Gráfica de una función. Las funciones de variable real suelen representarse en el plano mediante una línea. Los puntos de esa línea son $(x,\ f(x))$, siendo x del dominio de f.

Ejemplos:

a) Los pares de elementos relacionados por $f(x) = x^2 - 3x$ pueden darse con ayuda de una tabla. Así:

x	0	1	2	3	−1	−2	...
$f(x)$	0	−2	−2	0	4	10	…



Representando en el plano cartesiano esos pares (puntos (0, 0), (1, −2), (2, −2), (3, 0), (−1, 4), (−2, 10)…) y uniéndolos mediante una línea continua se obtiene la gráfica de dicha función.

Funciones definidas a trozos

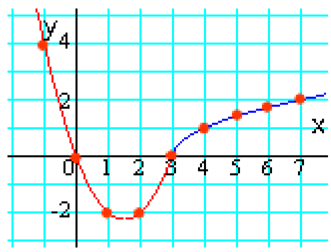
Una función puede venir definida mediante varias expresiones algebraicas. La manera de darlas suele ser:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \le a \\ f_2(x), & \text{si } x > a \end{cases}$$

Se indica así que la función que actúa para los valores de $x \le a$ es $f_1(x)$, y para los valores de $x \ge a$ es $f_2(x)$.

Ejemplo:

La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \le 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$, asocia a los números menores o iguales que 3, el valor $x^2 - 3x$; y a los mayores que 3, el resultado de $\sqrt{x-3}$.



Algunos pares de valores son:
Para $x \le 3$: (−2, 10), (−1, 4), (0, 0), (1, −2), (2, −2), (3, 0),…
Para $x > 3$: (4, 1), (5, $\sqrt{2}$), (6, $\sqrt{3}$), (7, 2),…
Su gráfica sería la adjunta.

Observaciones sobre el dominio de definición de las funciones usuales

- El dominio de f es el conjunto: $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$

El valor de $f(x)$ no existe cuando alguna de las operaciones que la definen no puede realizarse. Por ejemplo: la división por cero, la raíz de un número negativo, el logaritmo de un número menor o igual que cero; ... (en esos casos, al operar con calculadora saldrá el mensaje de ERROR). Otras veces será la naturaleza del problema lo que restringa su dominio; por ejemplo, un tiempo o una longitud no pueden tomar valores negativos.

- La imagen de f es el conjunto: $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbf{R} \mid y = f(x),\ x \in \text{Dom}(f)\}$

Ejemplos:

- La función $f(x) = x^2 - 4$ tiene por dominio todos los números reales; su recorrido son los números reales mayores o iguales que −4. Dom(f) = **R**; Im(f) = [−4, +∞).
- La función $g(x) = +\sqrt{x^2 - 4}$ está definida cuando $x^2 - 4 \ge 0$: para valores de $x \ge 2$ o $x \le -2$. Su recorrido son los números reales no negativos.

- La función $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ no está definida cuando $x = 1$; su dominio es: Dom(h) = **R** − $\{1\}$.
- La función $e(t) = 80t$, que determina el espacio recorrido por un vehículo que se mueve a 80 km/h durante un tiempo t, sólo tiene sentido para $t \geq 0$.

Si lo que se conoce es la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces:
El dominio viene dado por los valores del eje horizontal (eje *OX*) que tienen correspondiente. Si la vertical por *x* corta a la gráfica de *f* entonces *x* es del dominio de *f*.
La imagen, $f(x_0)$, de un número x_0, es el valor de la distancia, medida verticalmente, desde x_0 hasta la gráfica de *f*. Si la gráfica transcurre por debajo del eje, la imagen es negativa. En la
Si alguna recta vertical corta a la gráfica de f en más de un punto, entonces esa línea no define a una función.
El recorrido viene dado por los valores del eje vertical (eje *OY*) que son correspondiente de algún x del dominio. Si la horizontal por y_0 corta a la gráfica de *f* entonces y_0 pertenece al recorrido de *f*.

Ejemplo:
En la siguiente gráfica se muestra la evolución del índice de la bolsa de Madrid, IBEX 35, del día 26 de noviembre de 2010. El dominio es el tiempo transcurrido, desde las 9:00 h hasta las 17:37 minutos de ese día; el recorrido, los valores que toma, que van desde el mínimo (9442,60 puntos, que se dio algo después de las 13 h) al máximo (9652,80 puntos, que se dio algo antes de las 10 h.)

El día 26/11/2010, el índice de apertura fue de 9721,80, el de cierre 9527,20. La variación fue de −174,6 puntos, aproximadamente un −1,8%.

Operaciones con funciones

Con las funciones se pueden realizar las operaciones ordinarias.
La suma o resta de dos funciones f y g se define como si sigue:
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

El producto, que se denota por $(f \cdot g)(x)$ se define así: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

El cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

El dominio de las funciones anteriores es la

Ejemplo:
Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \cos x$, se tendrá:
$(f + g)(x) = x^2 - 2 + \cos x$; $(f - g)(x) = x^2 - 2 - \cos x$
$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 2)(\cos x)$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2 - 2}{\cos x}$.
Las funciones suma, resta y producto están definidas en toda la recta real. La función cociente no está definida cuando $\cos x = 0$, que se da cuando $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Composición de funciones
Cuando sobre la imagen, $f(x)$, de una función *f*, actúa otra función *g* se tiene la función compuesta $g(f(x))$. Primero actúa *f* y después *g*. El dominio de *g* será el recorrido de *f*. Esquemáticamente ese tendría:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

De manera análoga puede definirse $f(g(x))$: primero actúa *g*, después *f*. El dominio de *f* será el recorrido de *g*.
La composición de funciones no es conmutativa; esto, en general $g(f(x)) \neq f(g(x))$

Ejemplo:
Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 4$, la función $g(f(x)) = (f(x))^2 - 3 = (2x+3)^2 - 4$. Luego, $g(f(x)) = 4x^2 + 12x + 5$.
Por tanto, para $x = -1$ o $x = 3$ se tendrá: $g(f(-1)) = 4\cdot(-1)^2 + 12\cdot(-1) + 5 = -3$ y $g(f(2)) = 45$.
Si las funciones actúan sucesivamente (primero *f* y después *g*), se tendría el mismo resultado.
Para $x = -1$: $1 \to f(1) = 1 \to g(1) = -3$.
Para $x = 2$: $2 \to f(2) = 7 \to g(7) = 49 - 4 = 45$.
La función $f(g(x))$ será: $f(g(x)) = 2(g(x)) + 3 = 2(x^2 - 4) + 3 = 2x^2 - 5$.
Es evidente que la composición de funciones no es conmutativa.

Funciones inversas (o recíprocas)
Dos funciones *f* y *g* son inversas cuando su composición da la identidad. Esto es, cuando se cumple que: $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$.
La función inversa de *f* se designa por f^{-1}.

Observación. No siempre existe la función inversa de *f*. Para que exista es necesario que la función *f* sea inyectiva, que quiere decir que a valores distintos les asocia imágenes distintas. No obstante, algunas veces, como en el caso de las funciones trigonométricas, se sigue hablando de funciones inversas, aunque no lo sean. (En el ejemplo siguiente se aclarará este punto.)

Ejemplos:
Algunos pares de funciones inversas son:
a) $f(x) = \log x$ y $g(x) = 10^x$; o $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^x$.
En ambos casos se cumple que $f(g(x)) = x$. En efecto:
$f(g(x)) = \log 10^x = x$ y $g(f(x)) = 10^{\log x} = x$; $f(g(x)) = \ln e^x = x$ y $g(f(x)) = e^{\log x} = x$

b) Para $x \geq 0$, $f(x) = x^2$ y $g(x) = +\sqrt{x}$. La expresión $g(x) = \sqrt{x}$ no es estrictamente la de una función, pues a cada número real $x \geq 0$, le asocia dos valores. Por ejemplo, $\sqrt{4} = \pm 2$.
Tampoco la función $g(x) = +\sqrt{x}$ está definida para $x < 0$.
La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva en **R**, pues a números opuestos, x y $-x$, les asocia el mismo valor: $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$. En cambio sí lo es en el intervalo $[0, +\infty)$.
Por tales motivos, para afirmar que $f(x) = x^2$ y $g(x) = +\sqrt{x}$ son funciones inversas hay que restringir el domino de ambas funciones.
c) Para $0 \leq x < \pi$, $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \arccos x$.
La expresión $g(x) = \arccos x$ asigna infinitos valores a x, pero uno solo en el intervalo $[0, \pi)$.

Observación. No hay que confundir la función inversa con la inversa de una función. La inversa de una función f es la función $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$. Así, si $f(x) = x - 3$, $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{x-3}$.

Imagen inversa de un número
Para cualquier valor y_0 del recorrido de la función f, su imagen inversa, $f^{-1}(y_0)$, es el conjunto de los números x, del dominio, que se transforman mediante f en y_0. Esto es,
$f^{-1}(y_0) = \{x \in \mathbf{R} | f(x) = y_0\}$.

- Para hallar $f^{-1}(y_0)$ se resuelve la ecuación $f(x) = y_0$.
- En particular, $f^{-1}(0)$ da los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

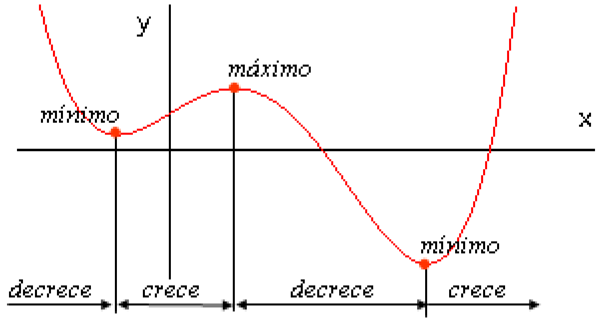
Ejemplos:
a) Si $f(x) = x^2 - 4$, la imagen inversa de 0, $f^{-1}(0)$, son las soluciones de $x^2 - 4 = 0$. Esto es, $x = -2$ y $x = 2$. $f^{-1}(0) = \{-2, 2\}$.
b) Si $f(x) = \cos x$, la imagen inversa de 0, $f^{-1}(0)$, son las soluciones de $\cos x = 0$. Esto es,
$x = \arccos 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$: $f^{-1}(0) = \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

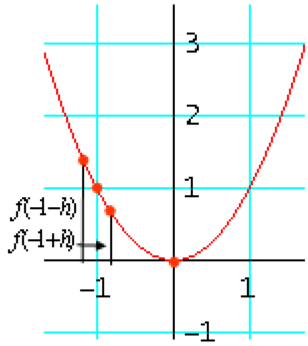
Características de algunas funciones

Crecimiento y decrecimiento
Una función f es creciente cuando el valor de f(x) aumenta al hacerlo x: la función sube. El concreto:
$f(x)$ es creciente en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \leq f(a) \leq f(a+h)$.
Una función es creciente en un intervalo cuando lo es en todos sus puntos.
Una función f es decreciente cuando el valor de f(x) disminuye cuando aumenta x: la función baja. El concreto: $f(x)$ es decreciente en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \geq f(a) \geq f(a+h)$
Una función es decreciente en un intervalo cuando lo es en todos sus puntos.

Máximos y mínimos
Una función tiene un máximo relativo en un punto cuando a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.
En concreto: $f(x)$ tiene un máximo en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \leq f(a) \geq f(a+h)$
Una función tiene un mínimo relativo en un punto cuando a su izquierda es decreciente y a su derecha creciente.

En concreto: $f(x)$ tiene un mínimo en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \geq f(a) \geq f(a+h)$
En todos los casos, h es un número positivo y pequeño.

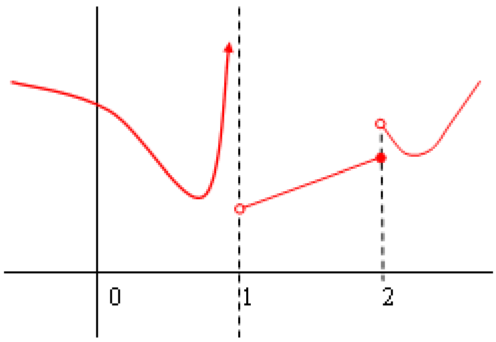




Ejemplo:
La función $f(x) = x^2$ es decreciente en $x = -1$ ya que $f(-1-h) > f(-1) > f(-1+h)$.
En efecto, $f(-1-h) = (-1-h)^2 = (1+h)^2 > 1$, $f(-1) = 1 > 1$, y $f(-1+h) = (-1+h)^2 < 1$.
También puede verse que en $x = 0$ la función tiene un mínimo, pues

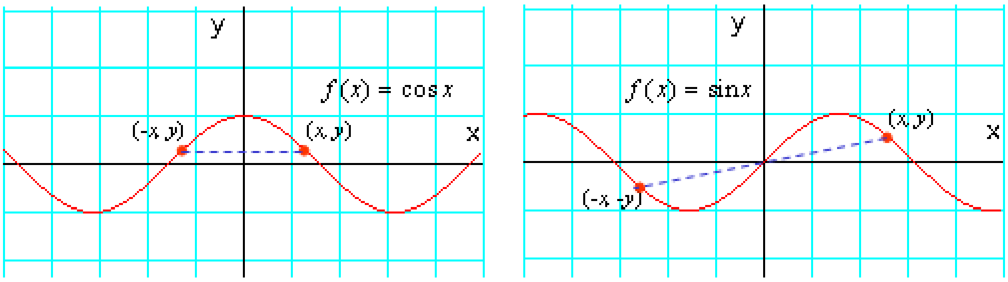
$$f(-h) = (-h)^2 > f(0) = 0 < f(h) = h^2.$$

Continuidad. Discontinuidades.
Una función *f* es continua cuando a variaciones infinitesimales de *x* corresponden variaciones infinitesimales $f(x)$. Intuitivamente significa que puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.
En todos los puntos en los que *f* no está definida se da una discontinuidad, un salto de su gráfica.
Nota. El estudio preciso de continuidad requiere la aplicación del concepto de límite, que se recordará más adelante.



Ejemplo:
La función adjunta es discontinua en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

Simetrías
Hay dos tipos de simetrías: simetría respecto del eje *OY* y simetría respecto del origen de coordenadas.
Una función es simétrica respecto del eje *OY* cuando $f(-x) = f(x)$, para todo *x* de su dominio. Estas funciones se llaman pares.
Una función es simétrica respecto del origen si $f(-x) = -f(x)$, para todo x de su dominio. Estas funciones se llaman impares.



Ejemplos:

a) La función $f(x) = \cos x$ es par: cumple que $\cos(-x) = \cos x$.

Otra función para es $f(x) = x^2 - 4$, pues $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$

b) La función $f(x) = \sin x$ es impar: cumple que $\sin(-x) = -\sin x$.

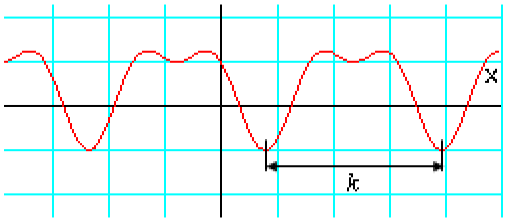
c) Otra función impar es $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+2}$, pues $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+2} = -\dfrac{x^3}{x^2+2} = -f(x)$.

d) La mayoría de las funciones no son ni pares ni impares. Así, la función $f(x) = x^2 - 3x$ no es par ni impar, pues $f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) = x^2 + 3x \neq \pm f(x)$.

Funciones periódicas

Una función es periódica cuando se repite a intervalos constantes. La amplitud del menor de esos intervalo es el periodo.

En concreto: f es periódica de periodo *k* cuando $f(x+k) = f(x)$, para todo *x* de su dominio.

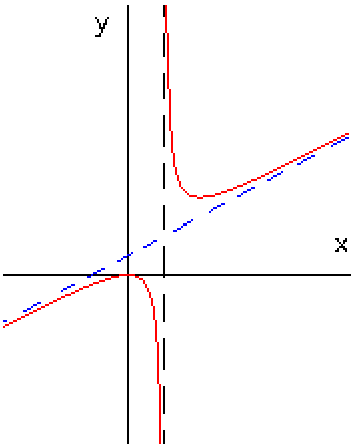


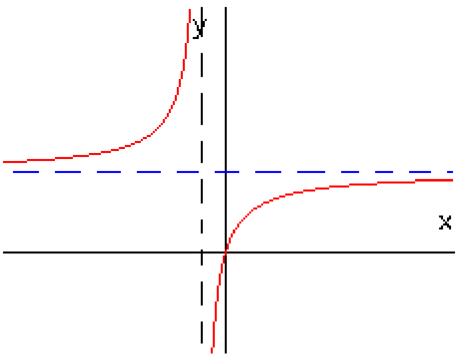
(Las funciones seno y coseno, dibujadas más arriba, también son periódicas.)

Tendencias asintóticas

Cuando la gráfica de una función se acerca cada vez a una recta se dice que la función tiene a esa recta por asíntota, o que tiende asintóticamente a esa recta.

Las asíntotas pueden ser verticales, horizontales y oblicuas.





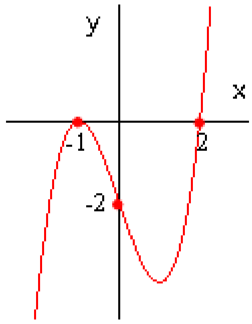
En los puntos donde exista una asíntota vertical la función no esta definida: siempre se da una ruptura, una discontinuidad.

La existencia de una asíntota (horizontal u oblicua), proporciona información muy precisa del comportamiento de la función *a largo plazo* de la función.

Funciones usuales (I): polinómicas, racionales y radicales

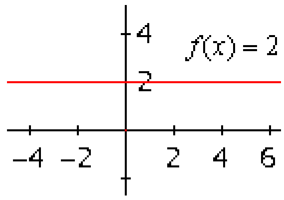
Funciones polinómicas

Vienen dadas por una expresión de la forma $f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, con n un número natural.
El dominio de definición de estas funciones es todo **R**: están definidas siempre.
El grado de una función polinómica es el del polinomio correspondiente.
La función polinómica de de grado n corta al eje OX en un máximo de n puntos. Las abscisas de los puntos de corte vienen dadas por las soluciones de la ecuación
$a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

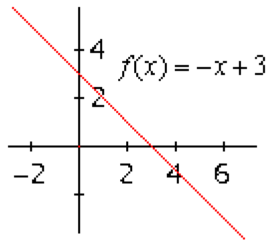


Ejemplo:
La función $f(x) = x^3 - 3x - 2$, corta al eje OX en las soluciones de la ecuación $x^3 - 3x - 2 = 0$. Estas soluciones son $x = -1$, doble, y $x = 2$. Como puede observarse, $f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$.
El punto de corte con el eje OY se obtiene dando a x el valor 0.
La gráfica de esta función es la adjunta.

- Las funciones polinómicas más frecuentes son:

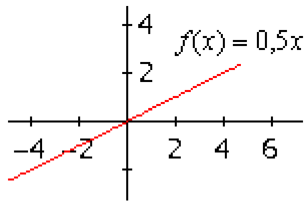


Función constante. Es la función polinómica de grado cero: $f(x) = a_0$ o $y = a_0$.
Su gráfica es una recta horizontal.



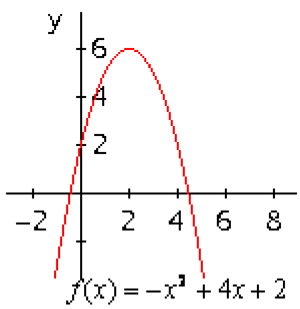
Función lineal (afín). Es la función polinómica de grado uno:
$f(x) = a_1 x + a_0$ o $y = mx + n$.
Su gráfica es una recta de pendiente m y ordenada en el origen n: corta al eje OY en el punto $(0, n)$.

Función de proporcionalidad directa. Es un caso particular de la anterior. Su expresión es $f(x) = mx$ o $y = mx$. Su gráfica es la de una recta que pasa por el origen. El coeficiente m indica la razón de proporcionalidad.



- Como puede observarse, $y = mx \Leftrightarrow \frac{y}{x} = m$, que indica que las variables x e y son directamente proporcionales, con constante de proporcionalidad k.
La regla de tres simple directa se ajusta a esta relación.

Función cuadrática. Es la función polinómica de grado dos,
$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ o $y = ax^2 + bx + c$.
Su gráfica es la de una parábola. Si $a > 0$, es convexa ($\cup$), su vértice está en el mínimo; si $a < 0$, es cóncava ($\cap$), su vértice está es el máximo.
- La gráfica de la función cuadrática corta al eje OX en dos puntos, en uno o en ninguno, dependiendo del número de soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Las abscisas de los puntos de corte son las soluciones de esa ecuación.



Funciones racionales

Las funciones racionales son de la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Estas funciones están definidas para todo valor de *x* que no anule el denominador.

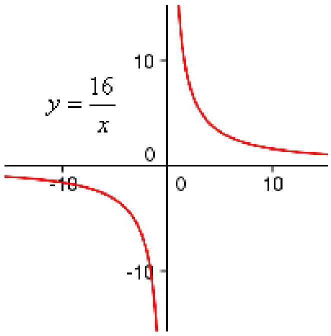
Ejemplos:

a) El dominio de $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$ es **R** − {0, 2}; su denominador se anula para $x = 0$ y $x = 2$.

b) La función $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x^2+1}$ está definida para todo **R**; su denominador no se anula nunca. }

Función de proporcionalidad inversa. Es un caso particular de función racional. Su expresión es $f(x)=\dfrac{k}{x}$ o $y=\dfrac{k}{x}$.

Su gráfica es una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.



- Como puede observarse, $y=\dfrac{k}{x} \Leftrightarrow yx=k$, que indica que las variables x e y son inversamente proporcionales, con constante de proporcionalidad *k*.

La regla de tres simple inversa se ajusta a esta relación.

Funciones con radicales

Son de la forma $y=\sqrt[n]{f(x)}$, siendo $f(x)$ cualquier otra función.

Estas funciones están definidas cuando está definida *f*(*x*) y además puede hacerse la raíz. Por tanto:

Las funciones radicales de índice par (caso de raíces cuadradas: $y=\sqrt{f(x)}$), están definidas sólo si $f(x)\geq 0$.

Las funciones radicales de índice impar (caso de raíces cúbicas: $y=\sqrt[3]{f(x)}$), están definidas siempre que lo esté $f(x)$.

Ejemplos**:**

a) $f(x)=\sqrt{2x-2}$ está definida para $x \geq 2$, intervalo [2, +∞).

b) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ está definida para todo $x \in$ **R**.

c) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$ está definida para todo $x \in$ **R** − {1}.

d) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ está definida para todo $x \in$ **R**, pues el radicando nunca es negativo.

e) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ está definida cuando $x^2-4\geq 0$, que se cumple cuando $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Observación: Para determinar el dominio de estas funciones conviene recordar la resolución de inecuaciones con radicales.

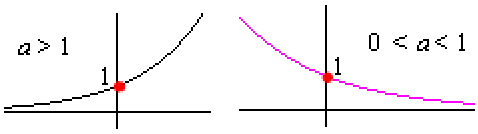
Funciones usuales (II): exponenciales y logarítmicas

La función exponencial.

Es de la forma $f(x) = a^x \Leftrightarrow y = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$.

Características fundamentales:

- Su domino es **R**.
- Siempre toma valores positivos. Esto es: $f(x) = a^x > 0$, para todo x.



- Si la base $a > 1$, la función siempre es creciente.
- Si la base $0 < a < 1$, la función siempre es decreciente.
- Corta al eje OY en $y = 1$, pues $a^0 = 1$, para cualquier valor de a.
- El eje OX, la recta $y = 0$, es una asíntota horizontal de la función; hacia $-\infty$ si $a > 1$, y hacia $+\infty$ si $0 < a < 1$.

Observación: La función $f(x) = a^{-x}$ es idéntica a $f(x) = \dfrac{1}{a^x}$, y la misma que $f(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$. Así, por ejemplo: $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$. En consecuencia, $f(x) = a^{-x}$ con $a > 1$ es decreciente siempre.

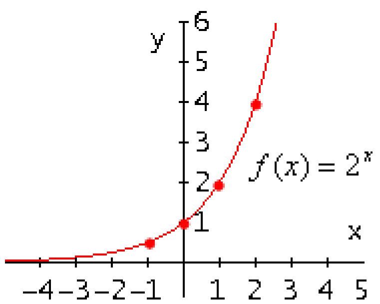
- Dos casos comunes de la función exponencial son $f(x) = 10^x$ y $f(x) = e^x$.

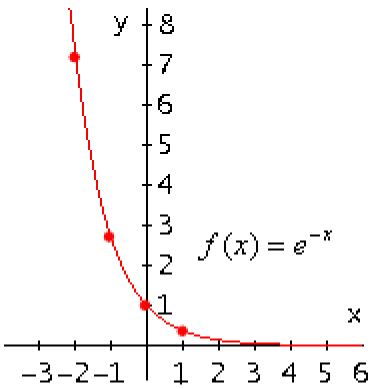
También son frecuentes $f(x) = 10^{-x}$ y $f(x) = e^{-x}$. Estas últimas funciones pueden escribirse como $f(x) = \dfrac{1}{10^x}$ y $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$.

Estas características permiten dibujar la gráfica de estas funciones, en casos elementales, con mucha facilidad.

Ejemplos:

a) Para trazar $y = 2^x$ basta con conocer unos cuantos puntos: (0, 1), (1, 2), (2, 4) y (–1, 1/2) sería suficiente. Como se sabe que es creciente y que hacia $-\infty$ se pega al eje OX por arriba, su gráfica es la de abajo.





b) Igualmente, para dibujar $y = e^{-x}$ basta con dar algunos valores: (0, 1), (–1, e) ≡ (–1, 2,72); (–2, e^2) ≡ (–2, 7,39); (1, 1/e) ≡ (1, 0,37). Como se sabe que es decreciente y que hacia $+\infty$ se pega al eje OX por arriba, su gráfica es la de arriba.

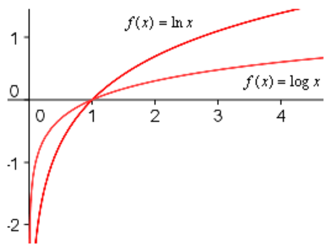
• La función general $f(x) = a^{g(x)}$ está definida siempre que lo esté $g(x)$.
Estas funciones están ligadas a problemas de capitalización y de descuento, de crecimiento malthusiano y de descomposición de sustancias radiactivas, entre otros.

Ejemplos:
a) $f(x) = 2^{3-x}$ está definida para todo número real.

b) $f(x) = 2^{\frac{1}{3-x}}$ está definida para todo número real distinto de 3: Dom = $\mathbf{R} - \{3\}$.

c) La función $C(t) = C_0(1+r)^t$ da el capital acumulado al cabo de t años, a una tasa de interés anual r (en tanto por uno), para un capital inicial C_0. Así, un capital de 20000 €, al 6% anual, se convierte al cabo de 8 años en $C(8) = 20000(1+0{,}06)^8 = 31876{,}96$ €.

La función logarítmica
La más sencilla es $f(x) = \log_a x \iff y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$).
Para las bases usuales, $a = 10$ y $a = e$: $f(x) = \log x$ y $f(x) = \ln x$.



Características fundamentales:
- Su dominio es $\mathbf{R}^+$, los reales positivos: $x > 0$.
- Toma valores que van desde $-\infty$ a $+\infty$: Recorrido = $(-\infty, +\infty)$.
- El eje OY, la recta $x = 0$, es asíntota vertical de su curva.
- Si $a > 1$ (que es lo usual), la función es creciente. (Si $0 < a < 1$, la función será decreciente.)

• La función general $f(x) = \log_a g(x)$ está definida siempre que $g(x) > 0$.

Ejemplos:
a) $f(x) = \log(x+3)$ está definida siempre que $x + 3 > 0$; esto es, cuando $x > -2$. Por tanto, su dominio es el intervalo $(-3, +\infty)$.
b) $f(x) = \log(x^2+3)$ está definida siempre, pues $x^2 + 3 > 0$ para todo x.
c) $f(x) = \log\dfrac{1}{x^2-3}$ está definida siempre que $\dfrac{1}{x^2-3} > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Observación: Como $f(x) = \log_a x \iff x = a^{f(x)}$, se deduce que las funciones exponencial y logarítmica son inversas; esto es, si aplicamos sucesivamente el logaritmo y la exponencial en la misma base, volvemos al punto de partida. O sea: $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$.
Esto permite utilizar los logaritmos para resolver ecuaciones de tipo exponencial.

Ejemplos:
a) Para determinar x en la siguiente ecuación, $5 = 3^x$, hay que aplicar logaritmos como sigue:
$$\log 5 = \log\left(3^x\right) \Rightarrow \log 5 = x \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1{,}46.$$
b) Con esto, podría plantearse el problema de "¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se duplique un capital a una tasa de interés del 3%?"
Es obvio que habría que resolver la ecuación $2C_0 = C_0(1+0{,}03)^t \iff 2 = (1+0{,}03)^t \Rightarrow t = 23{,}45$ años.

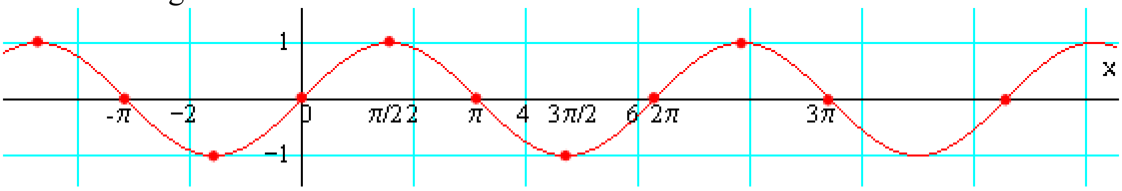
Funciones usuales (III): funciones trigonométricas seno, coseno y tangente

La función seno

Su expresión más sencilla es $f(x) = \text{sen}\, x$.

Características fundamentales:

- Su dominio de definición es **R**. Por tanto, x es un número real; no es un ángulo propiamente dicho: si se quiere, es un ángulo en radianes, no en grados.
- Los valores que toma el seno varían entre -1 y 1: su recorrido es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es periódica de periodo $p = 2\pi$. Esto es: $\text{sen}\, x = \text{sen}(x + 2\pi)$, para cualquier valor de x.
- Es una función simétrica respecto del origen. Esto es, $f(-x) = \text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\, x = -f(x)$.
- Su gráfica es la siguiente:

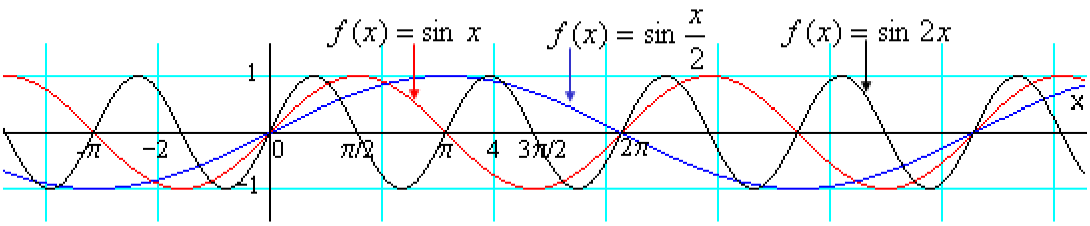


Nota: Las calculadoras trabajan esta función en el "modo" radianes: MODE RAD.

Otras funciones relacionadas con la función seno: La función $f(x) = \text{sen}\, kx$ contrae o dilata la función sen x. Si $k > 1$, se contrae; si $k < 1$, se dilata.

Ejemplo:

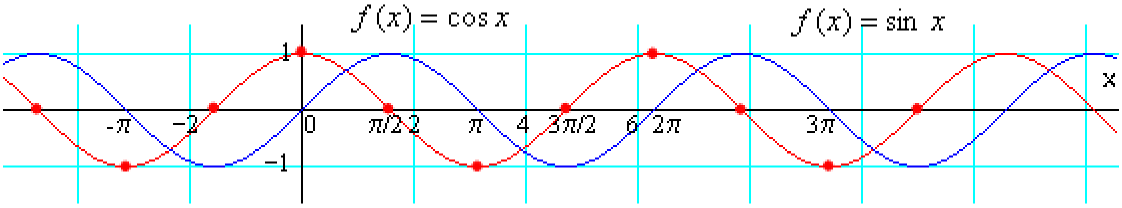
Para $k = 2$ y $k = 1/2$, se tendrían las funciones $f(x) = \sin 2x$ y $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$ las gráficas son las siguientes.



El periodo de $f(x) = \text{sen}\, 2x$ es $p = \pi$; el de $f(x) = \text{sen}\dfrac{1}{2}x$ es $p = 4\pi$.

La función coseno

Puede definir a partir del seno así: $f(x) = \cos x = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, su gráfica será idéntica a la del seno pero con un desfase de $\pi/2$ (se traslada $\pi/2$ a la izquierda).



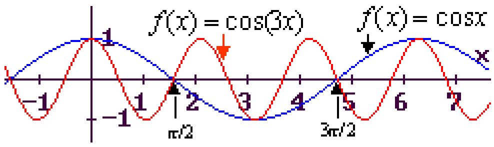
Características fundamentales:

- Su dominio de definición es **R**. Por tanto, como en la función seno, x es un número real
- Los valores que toma el coseno varían entre -1 y 1: su recorrido es el intervalo $[-1, 1]$.

- Es periódica de periodo $p = 2\pi$. Esto es: $\cos x = \cos(x + 2\pi)$, para cualquier valor de x.
- Es una función simétrica respecto del eje OY. Esto es, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.

Otras funciones relacionadas con la función coseno: La función $f(x) = \cos kx$ contrae o dilata la función cos x. Si $k > 1$, se contrae; si $k < 1$, se dilata.

Ejemplo:
Para $k = 3$, la función $f(x) = \cos 3x$ es la que se representa en la figura adjunta. Va tres veces más rápida que $f(x) = \cos x$. Su periodo es $p = \dfrac{2\pi}{3}$.

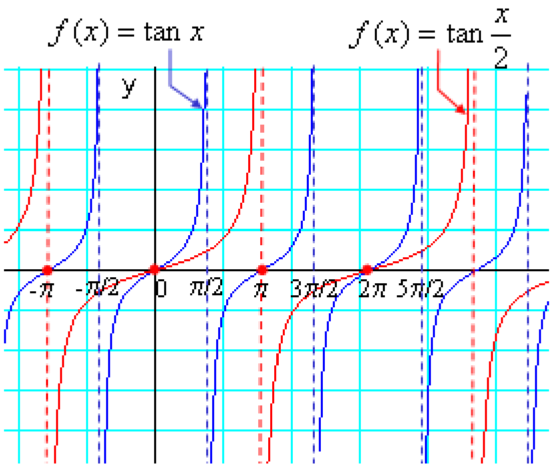


La función tangente

La función $f(x) = \operatorname{tag} x$ se define como: $f(x) = \operatorname{tag} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Características fundamentales:

- Su dominio de definición es $\mathbf{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, pues para $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ se anula el denominador: $\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$.
- Toma valores que varían entre $-\infty$ y $+\infty$: su recorrido es todo **R**.
- Es periódica de periodo $p = \pi$. Esto es: $\operatorname{tag} x = \operatorname{tag}(x + \pi)$, para cualquier valor de su dominio.
- Tiene por asíntotas verticales las rectas $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.



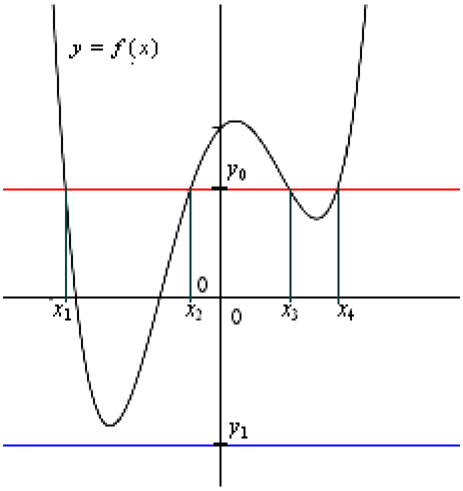
Otras funciones relacionadas con la función tangente: La función $f(x) = \operatorname{tag} kx$ contrae o dilata la función cos x. Si $k > 1$, se contrae; si $k < 1$, se dilata.

Ejemplo:

Para $k = 1/2$, la función $f(x) = \operatorname{tag}\dfrac{x}{2}$ es la que se representa en la figura anterior. Va la mitad de rápida que $f(x) = \operatorname{tag} x$: su periodo es $p = 2\pi$.

Ecuaciones e inecuaciones ligadas a distintas funciones

Si la expresión $y = f(x)$ designa una función, la expresión $y_0 = f(x)$ es una ecuación, siendo y_0 una constante. La solución de esa ecuación coincide con la imagen inversa del valor y_0 del recorrido de la función *f*; esto es $f^{-1}(y_0) = \{x \in \mathbf{R} | f(x) = y_0\}$: los valores de *x* cuya imagen vale y_0. Si la ecuación $y_0 = f(x)$ no tiene solución significará que y_0 no es del recorrido de *f*.



Así, en la figura adjunta, dada la función $y = f(x)$ se pueden plantear las ecuaciones: $f(x) = y_0$ y $f(x) = y_1$.

Las soluciones de la primera son x_1, x_2, x_3 y x_4, que son las abscisas de los puntos de corte de la gráfica de $y = f(x)$ con la recta horizontal $y = y_0$.

La ecuación $f(x) = y_1$ no tiene soluciones, pues la gráfica de la función no se corta con la recta horizontal $y = y_1$.

Las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ dan los puntos de corte de la función con ele je de abscisas.

Nota: La manera usual de definir lo que es solución de una ecuación es: "solución de una ecuación es cada uno de los valores de la variable *x* que verifica la igualdad.

- Para cada tipo de función se obtiene una ecuación asociada, que reciben los nombres de polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas…
- Cada tipo de ecuación tiene unos métodos de resolución apropiados, que obviamente conviene manejar con soltura. Esos métodos se estudian en los cursos de Secundaria y Bachillerato. Un resumen de esos métodos puede encontrarse en: http://www2.uah.es/jmmartinezmediano/ACMat/ACM%20Tema%2004A%20Ecuaciones.pdf

Inecuaciones

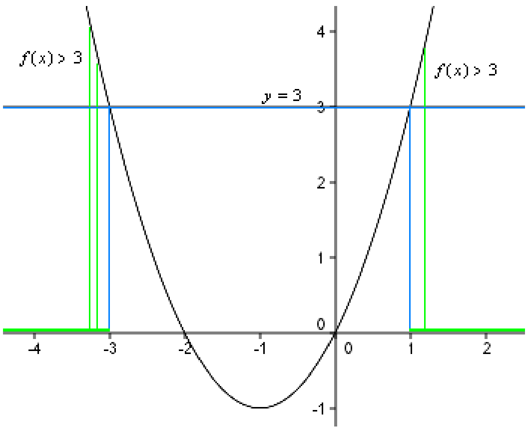
Si lo que interesa es conocer cuando una función toma valores mayores o menores a un número se tiene una inecuación. Las inecuaciones son expresiones como las siguientes:

$$f(x) > y_0 \qquad f(x) < y_0 \qquad f(x) \le y_0 \qquad f(x) \ge y_0$$

Las soluciones de una inecuación son cada uno de los valores de la variable *x* que cumplen la desigualdad. Una inecuación puede tener un conjunto infinito de soluciones, que suele darse en forma de intervalo.

Ejemplo:

Si $y = f(x)$ designa una función, las soluciones de $f(x) > y_0$ serán los valores de x que tengan un valor de la imagen mayor que y_0. Si la función fuese $f(x) = x^2 + 2x$, las soluciones de la inecuación $x^2 + 2x > 3$ son los valores de *x* tales que $f(x) > 3$, los que tienen una imagen por encima de la recta $y = 3$. Estos valores, como puede verse observando la figura adjunta, son $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.



- Para resolver inecuaciones es imprescindible conocer el manejo de las desigualdades. Puede encontrarse un buen resumen en: http://www2.uah.es/jmmartinezmediano/ACMat/ACM%20Tema%2004B%20Inecuaciones.pdf