

Tema 3. Razones y proporciones

- * Una **razón** es una **comparación** entre dos cantidades. Ej:
 - a) en una bolsa con bolas blancas y negras, la razón de bolas blancas a negras es de 2 a 7.
 - b) en cierto examen, la razón entre aprobados y suspensos es de 4 a 3.

- * Una razón puede venir dada en forma de fracción, pero no hay que confundir los conceptos. Algunas diferencias fundamentales:
 1. Una razón puede comparar dos **magnitudes heterogéneas** (con distintas unidades). Ej: consumo 6 litros/100 km.
 2. Una razón puede **no ser** un número racional. Ejemplo: la razón entre la longitud de una circunferencia y su radio.

Proporciones

- * Una **proporción** es una igualdad entre **dos razones**.
- * Ejemplo: en cierto examen la razón entre aprobados y suspensos es de 4 a 3. Si suspendieron 81 alumnos, ¿cuántos aprobaron?

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{81} \quad \rightarrow \quad 3x = 4 \cdot 81 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \cdot 81}{3} = 108$$

- * Y sí ... también se puede interpretar como la clásica “regla de tres”:

$$3 \quad \rightarrow \quad 81$$

$$4 \quad \rightarrow \quad x$$

El peligro de “la regla de 3”

4. EL RAZONAMIENTO DE LA REGLA DE TRES

Con la expresión “regla de tres” se designa un procedimiento que se aplica a la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y se requiere calcular el cuarto. Aunque aplicado correctamente el razonamiento supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución, ya que se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero, con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo están haciendo. En cierto modo el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. La regla de tres se llega a aplicar de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o impertinente. **o peor, errónea ...**

De Godino et al: Proporcionalidad y su didáctica para maestros (p. 425),
<http://tinyurl.com/8kxkr7r>

Ejemplos

* Problema: Si 3 entradas de cine cuestan 21 euros, ¿cuánto costarán 5 entradas iguales?

* Solución 1:

Como 3 entradas cuestan 21 euros, cada entrada cuesta 7 euros. Por tanto, 5 entradas costarán 35 euros.

Reducción a la unidad

* Solución 2:

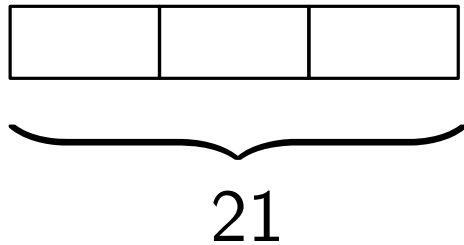
$$\left. \begin{array}{l} 3 \rightarrow 21 \\ 5 \rightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{21 \cdot 5}{3}$$

Regla de tres

Ejemplos

- * Problema: Si 3 entradas de cine cuestan 21 euros, ¿cuánto costarán 5 entradas iguales?

Una alternativa: los diagramas de barras (Singapur).



- * Al menos, una buena herramienta auxiliar.
Ventaja: visualizar ayuda a entender.

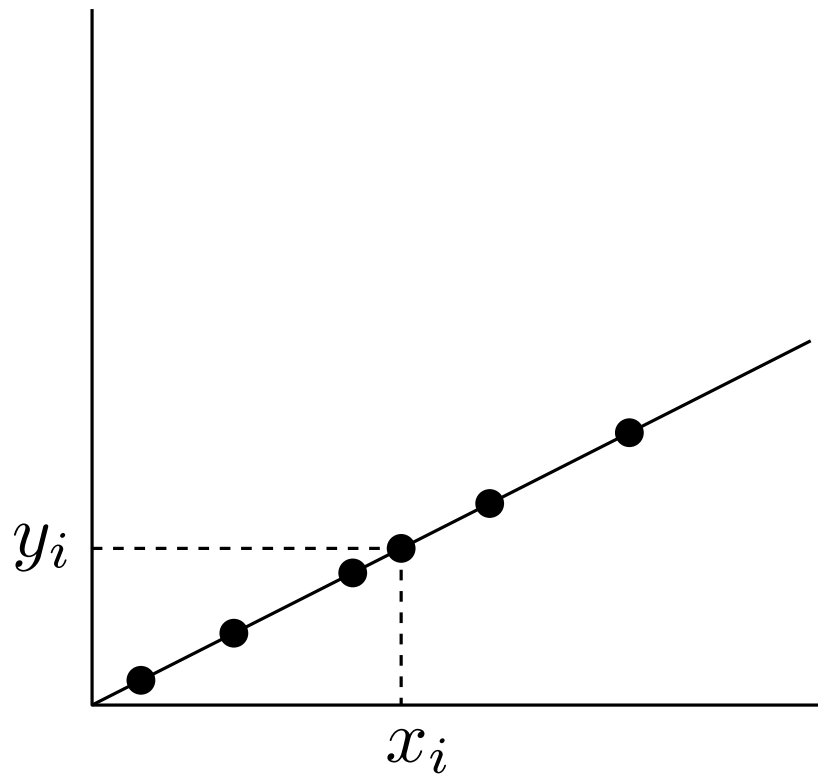
Proporcionalidad en la práctica. Series proporcionales

- * Dadas dos series de datos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, se dice que son proporcionales si x_j/y_j es constante (vale lo mismo para $j = 1, \dots, n$).
- * Un experimento (fácil e instructivo)
Hacer una tabla con la cantidad de agua que se echa en los siguientes vasos (medida en centilitros, en cucharadas, ...) y la altura alcanzada en el vaso. ¿Para qué modelo las series son proporcionales?

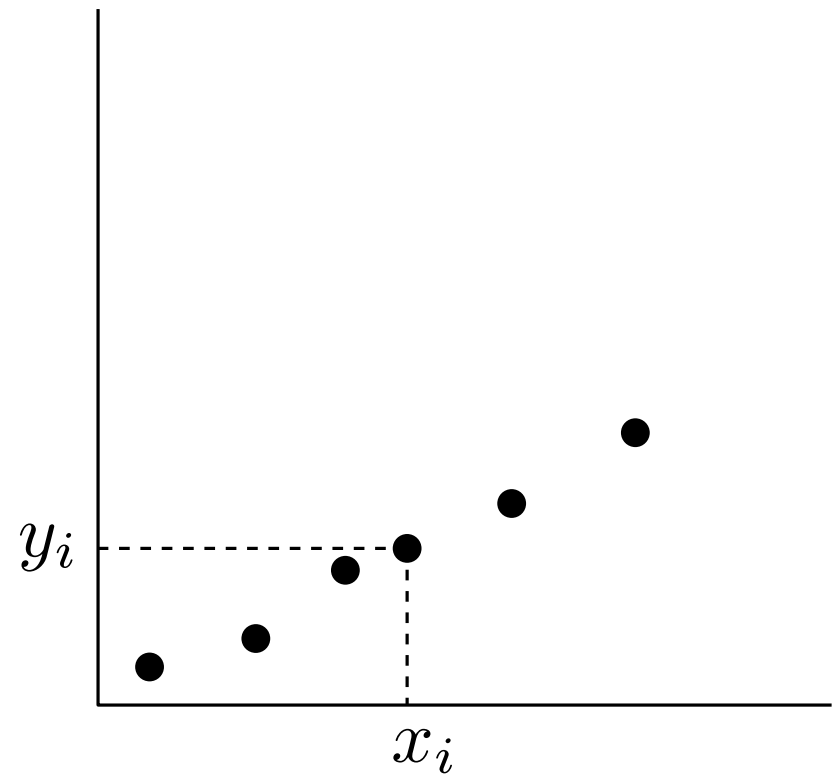


Series proporcionales

- * Si representamos en el plano cartesiano los datos del experimento anterior, ¿qué obtenemos?



Recta $y = kx$



(aproximadamente)

Problemas

- * Un ejemplo importante de razón: la escala.
La distancia entre dos puntos en un mapa de escala 1:20000 es de $6\frac{7}{10}$ cm. ¿Cuál es la distancia real?
- * La razón entre los lados de dos rectángulos es r . ¿Cuál es la razón entre los perímetros? ¿Y entre las áreas?
- * Si 8 hombres cortan 11 troncos en 6 horas, ¿cuánto tiempo les llevará a 5 hombres cortar 3 troncos, trabajando a la misma velocidad?

Una alternativa a la “regla de 3 compuesta”: **la reducción a la unidad.**

Magnitudes inversamente proporcionales

* Se dice que dos magnitudes x e y son **inversamente proporcionales** si su **producto es constante**.

* Ejemplos:

- velocidad y tiempo en un movimiento uniforme:

Un coche hace un viaje a velocidad constante. Si su velocidad aumenta $1/5$, ¿cuánto disminuye el tiempo?

- presión y volumen de un gas a temperatura constante
($PV = nRT$)

Si el volumen del gas se duplica a temperatura constante, ¿qué le pasa a la presión?

* Si representamos gráficamente dos magnitudes que son inversamente proporcionales, ¿qué se obtiene?

Problemas

- * Un grupo de excursionistas calcula una provisión de agua para 12 días. Si durante el viaje el consumo es un 50% superior al previsto, ¿cuándo se les acaba el agua?
- * Con una manguera de caudal 8 litros/minuto tardamos 1'5 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaremos con una manguera de caudal 5 litros/minuto?
- * Una nave sale de Nápoles hacia Barcelona y hace su viaje en 30 días. Otra sale de Barcelona hacia Nápoles y hace el viaje en 20 días. ¿En qué punto del trayecto se encuentran? (Se supone, claro, que las dos naves van por la misma ruta y a velocidad constante).

Porcentajes

- * Un porcentaje es una razón cuyo denominador es 100.
Es uno de los conceptos matemáticos que más se utilizan en la vida cotidiana.

- * Ejemplos:
 - a) En las elecciones de 2004 el partido A recibió 4323890 del total de 11523876 votos, en tanto que en las elecciones de 2008 recibió 4387905 votos del total de 11600399.
$$2004 \rightarrow 37'5\% \qquad 2008 \rightarrow 37'8\%$$

 - b) Incrementos de sueldo, de precio, rebajas, impuestos ...

Ejemplos elementales

1. Calcular un tanto por ciento de una cantidad.
2. Escribir una proporción en forma de porcentaje.

* ¿Sabemos razonar sobre porcentajes?

Supongamos que una tienda baja el 10% un modelo de pantalones para las rebajas de enero, y que los vuelve a subir un 10% pasadas las rebajas. El precio después de las rebajas es:

- a) el mismo del principio.
- b) mayor que al principio.
- c) menor que al principio.
- d) mayor o menor, dependiendo del precio inicial.

Ejemplos elementales

- * A un empleado le han subido el 2% durante dos años consecutivos. Al cabo de los dos años gana:
 - a) El 4% más que al principio.
 - b) Más del 4% más que al principio.
 - c) Menos del 4% más que al principio.
 - d) Más o menos del 4%, dependiendo del sueldo inicial.

- * ¿Qué es mayor, el 37% de 85 o el 85% de 37?

Cálculo “eficiente” de porcentajes

* Ejemplos:

- a) Un vestido de 85 euros está rebajado un 30%. ¿Cuál es su nuevo precio?
 - b) Juan gana 1250 euros mensuales y le suben el 2% el próximo enero. ¿Cuál será su nuevo sueldo?
- ¿Sabrías resolver estas cuestiones con una sola operación?

Porcentajes: ejemplos típicos

* Incrementos (IVA, subidas de precio, de sueldos)

El precio de venta al público de un artículo se obtiene sumando el IVA (en este momento el 18%) a su precio base.

1. Unas zapatillas tienen un precio antes de impuestos de 55 euros. ¿Cuál será su precio, IVA incluido?
2. He pagado 120 euros por un traje. ¿Cuánto IVA he pagado?

Porcentajes: ejemplos típicos

- * Descuentos (IRPF, rebajas).
 1. Enrique gana 25000 euros anuales brutos (es decir, sin descontar los impuestos), y paga un 18% de IRPF. ¿Cuáles son sus ingresos netos?
 2. Si unos pantalones están rebajados el 30% y me han costado 56 euros, ¿cuál era su precio antes de las rebajas?

Problemas

- * Ricardo ha empezado a trabajar en su nueva empresa y su sueldo inicial es de 1000 euros. Le han prometido que si cumple con los objetivos previstos, durante los siguientes 5 años el aumento de sueldo anual será del 4%. ¿Cuánto ganaría Ricardo después de los 5 años si cumple los objetivos todos los años?
- * Juan no recuerda cuánto ganó el año 2008, pero sí sabe que del 2008 al 2009 le subieron el sueldo un 3% y del 2009 al 2010 un 2%. Si el año 2010 ganó 1345 euros, ¿sabrías decirle cuánto ganaba el año 2008?